Rekurzív algoritmusok

- Azokat az algoritmusokat nevezzük **rekurzívnak**, amelyek kifejtésében, definiálásában maga a definiálandó algoritmus is szerepel.
- Az ilyen algoritmusok csak **szubrutinokkal** definiálhatók, hiszen csak ők képesek saját magukat közvetlenül, vagy más szubrutinokon keresztül közvetve meghívni.
- Minden rekurzív algoritmus megvalósítható **rekurzió nélkül** is, rekurzióval azonban rövidebb, áttekinthetőbb, a lényeget jobban kifejező megoldást adhatunk.

Faktoriális

- **Feladat**: Határozzuk meg egy pozitív egész szám faktoriálisát!

  Pl: 5! → 120

Faktoriális

- **Megoldás**:

$n!=1*2*3*...*(n-1)*n$

$n!=(n-1)!*n$

$0!=1$

Funkció	Azonosító	Típus	Jelleg
A szám, amelynek a faktoriálisát számoljuk	N	Egész	I
Az eredmény	ER	Egész	O

Faktoriális

```
/* Faktoriális kiszámítása rekurzív függvénnyel */
FAKT(N)
if N=0
    ER ← 1
else
    ER ← FAKT(N−1)*N
return ER
```

Gyorsrendezés

- A gyorsrendezés egy, az „**oszd meg és uralkodj**” elven alapuló algoritmus.
- Ezek az algoritmusok a feldolgozandó adatokat több, kisebb részre osztják, majd ezeket feldolgozva (rajtuk uralkodva) állítják elő a feladat megoldását.
- Az ilyen algoritmusokat többnyire **rekurzív szubrutinokkal** valósítják meg, amelyek a kisebb adatcsoportok feldolgozására saját magukat hívják meg rekurzívan.

Gyorsrendezés

- A gyorsrendezés rekurzív algoritmusának **paramétere** a rendezendő adatokat tartalmazó egydimenziós tömb és a feldolgozandó rész kezdő- és végindexe.
- Az eljárás lépései:
  1. Ha a feldolgozandó rész nem tartalmaz legalább két elemet, akkor készen vagyunk, hiszen az adott rész már rendezett, különben folytassuk a 2. ponttal.
  2. Elemcserékkel **válasszuk szét** az elemeket két részre úgy, hogy az első rész összes eleme legyen kisebb vagy egyenlő, mint a másik rész összes eleme.
  3. Rendezzük az **első részt**, azaz hívjuk meg az algoritmust az első részre.
  4. Rendezzük a **második részt**, azaz hívjuk meg az algoritmust a második részre.

Gyorsrendezés

- A **szétválasztást** az alábbiak szerint végezzük:
  - Válasszunk egy **középértéket** (más néven strázsa elemet), legyen ez a fizikailag (index szerint) középső elem értéke.
  - A tömbben elölről haladva keressük meg az első olyan elemet, amelyik **nem kisebb**, mint a középérték.
  - A tömbben hátulról haladva keressük meg az első olyan elemet, amelyik **nem nagyobb**, mint a középérték.
  - A két elemet **cseréljük fel**.
  - A kereséseket és cseréket a cserélt elemektől az eredeti irányokban haladva mindaddig **ismételjük**, amíg a két oldal nem találkozik.

- A **találkozási pont** két részre osztja a tömböt, elöl a középértéknél nem nagyobb, hátul a középértéknél nem kisebb értékű elemek találhatók.

Gyorsrendezés

7	3	8	5	1	6	4	2
2	3	8	5	1	6	4	7
2	3	4	5	1	6	8	7
2	3	4	1	5	6	8	7

A szétválasztás elemcseréi (strázsa:5)

- A gyorsrendezés műveletigénye:
  - Legrosszabb esetben n^2 nagyságrendű.
  - Átlagosan $n*\log_2 n$ nagyságrendű.

Gyorsrendezés

- **Típus**

```
ELEM Egész                          /* A rendezendő elemek típusa */
TOMB Egydimenziós ELEM tömb         /* Az elemeket tároló tömb típusa */
```

Funkció	Azonosító	Típus	Jelleg
A rendezendő elemek	A	TOMB	I, M, O
A rendezendő rész kezdete	K	Egész	I
A rendezendő rész vége	V	Egész	I
Az elölről induló pásztázó index	I	Egész	M
A hátulról induló pásztázó index	J	Egész	M
A strázsa elem	S	ELEM	M
Két elem cseréjéhez	CS	ELEM	M

Gyorsrendezés

```
/* Gyorsrendezés rekurzívan */
GYORSREND(A,K,V)
if K<V
    /* Van legalább két elem */
    I ← K
    J ← V
    S ← A[(I+J) DIV 2]
    /* Szétválogatás a strázsa (S) elemhez képest */
    ...
```

Gyorsrendezés

```
...
/* Szétválogatás a strázsa (S) elemhez képest */
while I<=J
        while A[I]<S
                I ← I+1
        while A[J]>S
                J ← J−1
        if I<=J
                /* Az I. és J. elemek cseréje */
                CS ← A[I]
                A[I] ← A[J]
                A[J] ← CS
                I ← I+1
                J ← J−1
/* Az első rész rendezése rekurzív hívással */
GYORSREND(A,K,J)
/* A második rész rendezése rekurzív hívással */
GYORSREND(A,I,V)
```

Gyorsrendezés

- Megjegyzés:
  - A kezdőhívás paraméterei:
    - A rendezendő elemeket tartalmazó tömb
    - Az első és utolsó elem indexe
  - Az I=J esetben történő felesleges elemcsere egy újabb feltétellel kivédhető, de ekkor a feltétel kiértékelése kerül „plusz” időbe.

Kínai gyűrűk

- **Kínai gyűrűk**:
  - Egy mechanikus játék, amelyben adott számú (*N*) gyűrű található.
  - Minden gyűrűnek kétféle állapota van: **fent** vagy **lent**.

- **Feladat**: Vegyük le a kezdetben fent lévő összes gyűrűt az alábbi szabályok betartásával:
  - Egyszerre csak egy gyűrű mozgatható.
  - Az 1. gyűrű szabadon mozgatható.
  - Az *N*. gyűrű (*N*>1) mozgatásához
    - Az *N*−1. gyűrűnek fent kell lennie,
    - Az *N*−2., …, 1. gyűrűknek lent kell lennie.

Kínai gyűrűk

- **Megoldás**:
  - Három, egymást rekurzívan hívó és egy kiíró szubrutin.
  - A gyűrűk állapotát egy egydimenziós (globális) tömbben tároljuk:
    - 1:fent, 0:lent van az adott gyűrű.

Kínai gyűrűk

- **Feladat**: Vegyünk le egy adott gyűrűt!

Kínai gyűrűk

- **Feladat**: Vegyünk le egy adott gyűrűt!

Funkció	Azonosító	Típus	Jelleg
A gyűrűk aktuális állapota	GYURUK	Egydimenziós egész tömb	I, O
A gyűrű sorszáma	N	Egész	I

```
/* Az N. gyűrű levétele */
LE(N)
if GYURUK[N]=1
    if N>1
        FEL(N−1)
        if N>2
            BALRALE(N−2)
    GYURUK[N] ← 0
    KIIR
```

Kínai gyűrűk

- **Feladat**: Tegyünk fel egy adott gyűrűt!

Funkció	Azonosító	Típus	Jelleg
A gyűrűk aktuális állapota	GYURUK	Egydimenziós egész tömb	I, O
A gyűrű sorszáma	N	Egész	I

```
/* Az N. gyűrű feltétele */
FEL(N)
if GYURUK[N]=0
    if N>1
        FEL(N−1)
        if N>2
            BALRALE(N−2)
    GYURUK[N] ← 1
    KIIR
```

Kínai gyűrűk

- **Feladat**: Vegyünk le egy adott gyűrűt, és az azt megelőző összes gyűrűt!

Funkció	Azonosító	Típus	Jelleg
A gyűrűk aktuális állapota	GYURUK	Egydimenziós egész tömb	I, O
A gyűrű sorszáma	N	Egész	I
Az aktuális gyűrű	I	Egész	M

```
/* Az N. és a megelőző gyűrűk levétele */
BALRALE(N)
for I ← N,1,−1
    LE(I)
```

Huszár útja

- **Feladat**: Járjunk be egy *N*×*N*-es méretű „sakktáblát”, egy adott kezdőmezőről indulva úgy, hogy minden mezőre pontosan egyszer lépünk!

	8		1	
7				2
				
6				3
	5		4	

Huszár lehetséges lépései

1	20	17	12	3
16	11	2	7	18
21	24	19	4	13
10	15	6	23	8
25	22	9	14	5

Huszár útja egy 5×5-ös táblán

Összes megoldás megkeresése

Próbáljunk új választást
for Az összes választáson
    Válasszuk ki az adott választást
    if Megfelelő
        Jegyezzük fel
        if Megoldás nem teljes
            /* Rekurzív hívás */
            Próbáljunk új választást
        else
            Megoldás kiírása
        A feljegyzés törlése

Egy megoldás megkeresése

Próbáljunk új választást
A választás előkészítése
repeat
    Válasszuk ki a következő választást
    if Megfelelő
        Jegyezzük fel
        if Megoldás nem teljes
            /* Rekurzív hívás */
            Próbáljunk új választást
            if NOT (Van Megoldás)
                A feljegyzés törlése
        else
            Van megoldás ← igaz
until (Van megoldás) OR (Nincs több választás)

Huszár útja

- **Konstans**

```
LEPS=(−2,−1, 1, 2, 2, 1,−1,−2)      /* Relatív sor elmozdulások */
LEPO=(1, 2, 2, 1,−1,−2,−2,−1)       /* Relatív oszlop elmozdulások */
```

- **Típus**

```
MEZO Rekord
        S, O        Egész
```

Huszár útja

Funkció	Azonosító	Típus	Jelleg
A sakktábla mérete	N	Egész	I
A sakktábla	TABLA	Kétdimenziós egész tömb	I, M, O
Az aktuális lépés sorszáma	LEPES	Egész	I
Az aktuális mező	AKT	MEZO	I
Van-e megoldás	VANMEGO	Logikai	M, O
Az aktuális lépés iránya	IRANY	Egész	M
A következő lépés mezője	KOV	MEZO	M

- Megjegyzés:
  - Ha MAXMERET jelöli a maximális méretet, akkor a TABLA tömb MAXMERET*MAXMERET elemű.

Huszár útja

```
/* A huszár következő lépése */
PROBAL(LEPES,AKT)
/* A választás előkészítése */
IRANY ← 1
repeat
    /* Válasszuk ki a következő választást */
    KOV.S ← AKT.S+LEPS[IRANY]
    KOV.O ← AKT.O+LEPO[IRANY]
    /* Megfelelő? */
    if (KOV.S>=1) AND (KOV.S<=N) AND
      (KOV.O>=1) AND (KOV.O<=N) AND
      (TABLA[KOV.S,KOV.O]=0)
          /* Jegyezzük fel */
          ...
```

Huszár útja

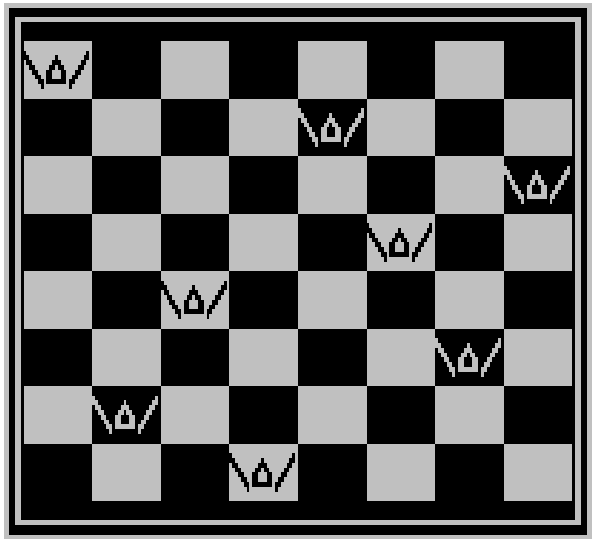
```
            ...
            /* Jegyezzük fel */
            TABLA[KOV.S,KOV.O] ← LEPES
            /* A megoldás nem teljes? */
            if LEPES<N*N
                        /* Rekurzív hívás */
                        PROBAL(LEPES+1,KOV)
                        if NOT VANMEGO
                                    /* A feljegyzés törlése */
                                    TABLA[KOV.S,KOV.O] ← 0
            else
                        VANMEGO ← igaz
      IRANY ← IRANY+1
until VANMEGO OR (IRANY>8)
```

Huszár útja

- Megjegyzés:
  - A szubrutin kezdőhívása előtt be kell állítanunk a **kezdőmezőt**, a táblába ide 1-t, a többi helyre 0-t kell tennünk. A VANMEGO értékét *hamisra* kell állítanunk.
  - A **kezdőhívás** 2 lépésszámmal végzendő, az **eredményt** a VANMEGO ill. a TABLA változók tartalmazzák.

Nyolc királynő

- **Feladat**: Helyezzünk el egy sakktáblán 8 db királynőt úgy, hogy azok ne üssék egymást, azaz ne essenek egymás ütésvonalába!



A 8 királynő probléma egy megoldása

Nyolc királynő

Funkció	Azonosító	Típus	Jelleg
A sakktábla mérete	N	Egész	I
A királynők helye	HOL	Egydimenziós egész tömb	I, M, O
Az aktuális sor sorszáma	S	Egész	I
A főátlók foglaltsága	FATL	Egydimenziós logikai tömb	I, M, O
A mellékátlók foglaltsága	MATL	Egydimenziós logikai tömb	I, M, O
Az oszlopok foglaltsága	OSZL	Egydimenziós logikai tömb	I, M, O
Az aktuális oszlop	O	Egész	M

- Megjegyzés:
  - Ha MAXMERET jelöli a maximális méretet, akkor a HOL és OSZL tömbök MAXMERET eleműek, az FATL, MATL tömbök 2*MAXMERET−1 eleműek.

Nyolc királynő

```
/* Egy királynő elhelyezése az S. sorba */
PROBAL(S)
/* Az összes választáson */
for O ← 1,N
    /* S. sorba az O. oszlopba téve az S. királynőt */
    /* Megfelelő? */
    if NOT OSZL[O] AND NOT FATL[S−O+N] AND NOT MATL[S+O−1]
        /* Jegyezzük fel */
        HOL[S] ← O
        OSZL[O] ← igaz
        FATL[S−O+N] ← igaz
        MATL[S+O−1] ← igaz
        /* A megoldás nem teljes? */
        ...
```

Nyolc királynő

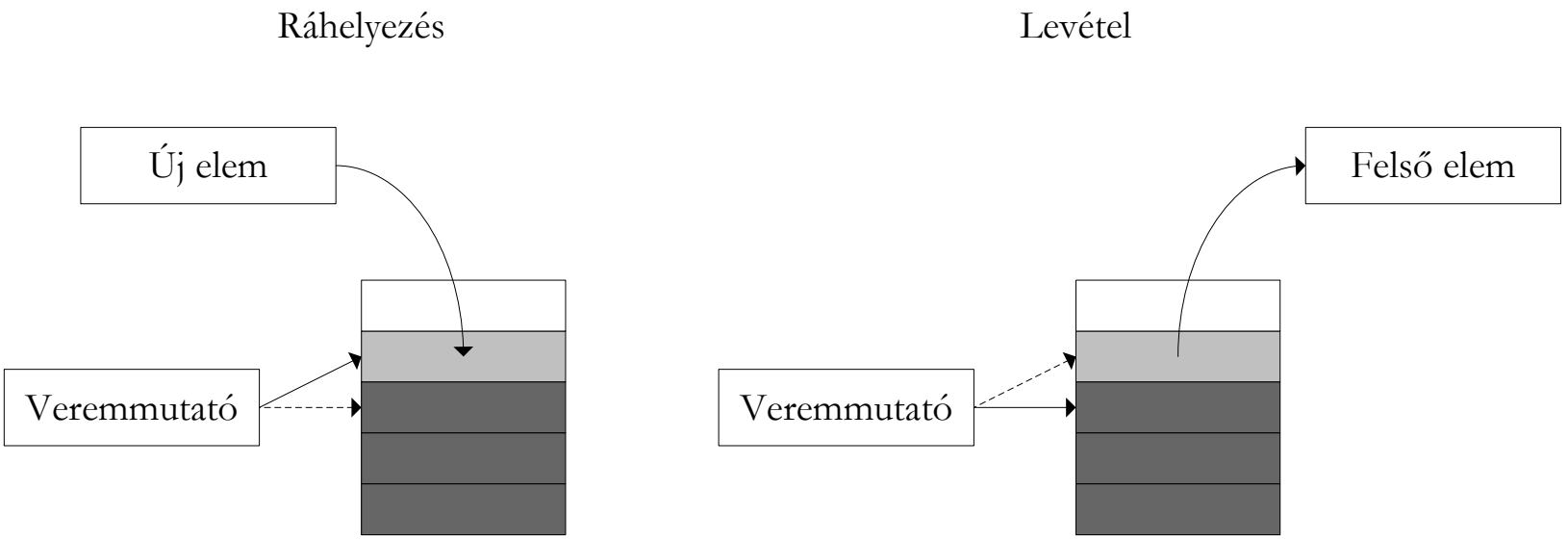
```
...
/* A megoldás nem teljes? */
if S<N
        /* Rekurzív hívás */
        PROBAL(S+1)
else
        MEGOKIIR
/* A feljegyzés törlése */
OSZL[O] ← hamis
FATL[S−O+N] ← hamis
MATL[S+O−1] ← hamis
```

Nyolc királynő

- Megjegyzés:
  - A szubrutin kezdőhívása előtt a **foglaltságokat** jelző logikai tömbökbe (OSZL, FATL, MATL) hamis kezdőértékeket kell tennünk.
  - A **kezdőhívás** 1-es paraméterrel végzendő, a **megoldások** kiírását a MEGOKIIR szubrutin végzi a HOL tömb alapján.

Verem

- A **verem**, mint összetett adatstruktúra műveletei:
  - Ráhelyezés (**push**): egy elemet teszünk a verembe, ez lesz a verem legfelső eleme.
  - Levétel (**pop**): a verem legfelső elemét kivesszük, eltávolítjuk a veremből.



Veremműveletek

Verem

- **Feladat**: Rendezzünk egy tömbben lévő adatsort növekvő (nem csökkenő) sorrendbe a gyorsrendezés módszerével, saját verem-kezeléssel!

- **Típus**

```
ELEM Egész                                  /* A rendezendő elemek típusa */
TOMB Egydimenziós ELEM tömb                 /* Az elemeket tároló tömb típusa */
VEREMELEM Rekord
        K       Egész                       /* A rendezendő rész kezdete */
        V       Egész                       /* A rendezendő rész vége */
TVEREM Egydimenziós VEREMELEM tömb          /* A verem típusa */
```

Verem

- **Feladat**: Tegyünk egy elemet a verembe!

Verem

- **Feladat**: Tegyünk egy elemet a verembe!

Funkció	Azonosító	Típus	Jelleg
A verem	VEREM	TVEREM	I, O
A veremmutató	VEREMMUT	Egész	I, O
A rendezendő rész kezdete	K	Egész	I
A rendezendő rész vége	V	Egész	I

```
/* Adat betétele a verembe */
VEREMBE(VEREM,VEREMMUT,K,V)
VEREMMUT ← VEREMMUT+1
VEREM[VEREMMUT].K ← K
VEREM[VEREMMUT].V ← V
```

Verem

- **Feladat**: Vegyünk ki egy elemet a veremből!

Funkció	Azonosító	Típus	Jelleg
A verem	VEREM	TVEREM	I, O
A veremmutató	VEREMMUT	Egész	I, O
A rendezendő rész kezdete	K	Egész	O
A rendezendő rész vége	V	Egész	O

```
/* Adat kivétele a veremből */
VEREMBOL(VEREM,VEREMMUT,K,V)
K ← VEREM[VEREMMUT].K
V ← VEREM[VEREMMUT].V
VEREMMUT ← VEREMMUT−1
```

Verem

Funkció	Azonosító	Típus	Jelleg
A rendezendő elemek	A	TOMB	I, M, O
A rendezendő elemek száma	N	Egész	I
A verem	VEREM	TVEREM	M
A veremmutató	VEREMMUT	Egész	M
A rendezendő rész kezdete	K	Egész	M
A rendezendő rész vége	V	Egész	M
Az elölről induló pásztázó index	I	Egész	M
A hátulról induló pásztázó index	J	Egész	M
A strázsa elem	S	ELEM	M
Két elem cseréjéhez	CS	ELEM	M

Verem

```
/* Gyorsrendezés nem rekurzívan */
GYORSREND(A,N)
/* A verem inicializálása */
VEREMMUT ← 0
/* A teljes rendezendő részt a verembe */
VEREMBE(VEREM,VEREMMUT,1,N)
while VEREMMUT>0
    /* A rendezendő rész kivétele a veremből */
    VEREMBOL(VEREM,VEREMMUT,K,V)
    if K<V
        /* Van legalább két elem */
        I ← K
        J ← V
        S ← A[(I+J) DIV 2]
        /* Szétválogatás a strázsa (S) elemhez képest */
        ...
```

Verem

```
...
/* Szétválogatás a strázsa (S) elemhez képest */
while I<=J
        while A[I]<S
                I ← I+1
        while A[J]>S
                J ← J−1
        if I<=J
                /* Az I. és J. elemek cseréje */
                CS ← A[I]
                A[I] ← A[J]
                A[J] ← CS
                I ← I+1
                J ← J−1
/* A két rész felvétele a verembe */
...
```

Verem

```
...
/* A két rész felvétele a verembe */
if J−K>V−I
        VEREMBE(VEREM,VEREMMUT,K,J)
        VEREMBE(VEREM,VEREMMUT,I,V)
else
        VEREMBE(VEREM,VEREMMUT,I,V)
        VEREMBE(VEREM,VEREMMUT,K,J)
```