Matematika 1 mintafeladatok

Lukács Antal

2016. február 20.

Tartalomjegyzék

1. Komplex számok algebrai alakja

1.1. Alapfeladatok

1. **Feladat:** Legyen $z_1 = 2 + 3i$ és $z_2 = 5 - 4i$! Határozzuk meg az alábbiakat!

   (a) $z_1 + z_2$

   (b) $3z_2 - z_1$

   (c) $z_1 \cdot z_2$

   (d) $\mathrm{Re}(i \cdot z_1)$

   (e) $\mathrm{Im}(z_2 + 2i^{19})$

   Megoldás:

   (a) Két komplex számot kell összeadnunk. Ezt úgy hajtjuk végre, hogy összeadjuk a valós részeket, így magkapjuk az összeg valós részét, és összeadjuk a képzetes részeket, s ezzel megkapjuk az összeg képzetes részét.
   $z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (5 - 4i) = (2 + 5) + (3 - 4)i = 7 - i$

   (b) A feladat két részből áll. Elsőként egy komplex számot meg kell szoroznunk egy valós számmal. Ezt úgy hajtjuk végre, hogy a komplex szám valós és képzetes részét is megszorozzuk a valós számmal.
   $3z_2 = 3(5 - 4i) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot (-4)i = 15 - 12i$
   Ezután két komplex szám kivonása a feladat, amit az összeadáshoz hasonlóan úgy végzünk el, hogy valós részből valós részt vonunk ki, képzetes részből pedig képzetes részt.
   $3z_2 - z_1 = (15 - 12i) - (2 + 3i) = (15 - 2) + (-12 - 3)i = 13 - 15i$

   (c) Most szoroznunk kell két komplex számot. Ezt úgy végezhetjük el a legegyszerűbben, hogy a két komplex számot, mint két darab kéttagú algebrai kifejézést szorozzuk össze, azaz minden tagot minden taggal szorzunk.
   $z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i) \cdot (5 - 4i) =$
   $= (2 \cdot 5) + (2 \cdot (-4i)) + ((3i) \cdot 5) + ((3i) \cdot (-4i)) = 10 - 8i + 15i - 12i^2$
   Ezután használjuk fel, hogy tudjuk, $i^2 = -1$, majd vonjuk össze az egynemű tagokat, azaz külön a valós részeket és a képzetes részeket.
   $10 - 8i + 15i - 12i^2 = 10 - 8i + 15i - 12 \cdot (-1) = 10 - 8i + 15i + 12 =$
   $= (10 + 12) + ((-8) + 15)i = 22 + 7i$

(d) Két részből áll a feladat. Először egy szorzást kell elvégeznünk, majd a szorzatnak venni a valós részét. A szorzást most egyszerűbben hajthatjuk végre, mint az előbb, hiszen az első tényező csak a képzetes egység, így nem kéttagú kifejezés.
$i \cdot z_1 = i \cdot (2+3i) = i \cdot 2 + i \cdot (3i) = 2i + 3i^2$
Most is használjuk fel, hogy $i^2 = -1$.
$2i + 3i^2 = 2i + 3 \cdot (-1) = 2i - 3 = -3 + 2i$
Ezután vegyük az eredmény valós részét.
$\mathrm{Re}(i \cdot z_1) = \mathrm{Re}(-3+2i) = -3$

(e) Ez a feladat már három részből áll. Elsőként meg kell határoznunk i^{19}-t. Utána ennek kétszeresét hozzá kell adnunk z_2-höz. Végül az eredménynek vennünk kell a képzetes részét.
Az i hatványairól tudjuk, hogy periodikusan váltakoznak.
$i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^5 = i,\ \cdots$
Ezért, ha i valamilyen magasabb kitevős hatványát kell meghatározni, akkor elég azt megviszgálni, mi a kitevőnek a maradéka 4-gyel osztva, s elég az i-t erre a maradékra hatványozni. Ez jelen esetben a következőt jelenti:
$i^{19} = i^{(4 \cdot 4+3)} = \left(i^4\right)^4 \cdot i^3 = 1^4 \cdot i^3 = i^3 = -i$
Adjuk ennek kétszeresét z_2-höz.
$z_2 + 2i^{19} = (5-4i) + 2 \cdot (-i) = 5 - 4i - 2i = 5 - 6i$
Végül vegyük ennek a képzetes részét!
$\mathrm{Im}(z_2 + 2i^{19}) = \mathrm{Im}(5-6i) = -6$
Nagyon figyeljünk oda arra, hogy a képzetes rész csak az i együtthatója. Nem tartalmazza az i-t.

2. **Feladat:** Legyen $z_1 = 3 - 5i$ és $z_2 = 4 + 2i$! Határozzuk meg az alábbiakat!

(a) $\overline{z_1} + \overline{z_2}$

(b) $\overline{(z_1^2)}$

(c) $\dfrac{z_1}{z_2}$

(d) $\dfrac{i}{z_1}$

Megoldás:

(a) A feladatban két komplex szám konjugáltját kell meghatározni, majd a konjugáltakat összeadni. Kezdjük a konjugálásokkal. Egy komplex szám konjugáltját úgy kapjuk, hogy a komplex szám képzetes részének előjelét megváltoztatjuk. Jelen esetben ez az alábbiakat jelenti:

$\overline{z_1} = \overline{(3-5i)} = 3+5i$
$\overline{z_2} = \overline{(4+2i)} = 4-2i$
Ezután már csak az összeadás van hátra.
$\overline{z_1} + \overline{z_2} = (3+5i) + (4-2i) = (3+4) + (5-2)i = 7+3i$
Itt meg kell jegyezni, hogy ugyanezt az eredményt kaptuk volna, ha a műveleteket fordított sorrendben hajtjuk végre, azaz először összeadjuk a két komplex számot, majd az eredménynek vesszük a konjugáltját. A műveletek ilyen sorrendjét képletben $\overline{z_1+z_2}$ formában írhatjuk. Ellenőrizzük le, hogy így valóban ugyanazt kapjuk, mint az előbb. Most elsőként az összeadást végezzük el.
$z_1 + z_2 = (3-5i) + (4+2i) = (3+4) + (-5+2)i = 7-3i$
Ezután vegyük ennek konjugáltját, azaz változtassuk meg a képzetes rész előjelét.
$\overline{z_1+z_2} = \overline{7-3i} = 7+3i$
Általánosságban is igaz, hogy $\overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_1+z_2}$, s hasonlóan igaz a $\overline{z_1} - \overline{z_2} = \overline{z_1-z_2}$ összefüggés is.

(b) Most elsőként egy komplex számot négyzetre kell emelnünk, majd utána az eredmény konjugáltját kell vennünk. A négyzetre emelés lényegében egy szorzás, hiszen ekkor a komplex számot önmagával szorozzuk.
$z_1^2 = (3-5i)^2 = (3-5i)\cdot(3-5i) =$
$3\cdot 3 + 3\cdot(-5i) + (-5i)\cdot 3 + (-5i)\cdot(-5i) = 9 - 15i - 15i + 25i^2 =$
$= 9 - 15i - 15i + 25\cdot(-1) = 9 - 15i - 15i - 25 = -16 - 30i$
Persze hivatkozhattunk volna a középiskolából ismert $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ összefüggésre is, azaz a kéttagú kifejezések négyzetre emelési módjára. Ekkor a következő a számolás.
$z_1^2 = (3-5i)^2 = 3^2 + 2\cdot 3\cdot(-5i) + (-5i)^2$
A $(-5i)^2$ számolásakor egy szorzatot emelünk négyzetre, amit tényezőnként végezhetünk el.
$3^2 + 2\cdot 3\cdot(-5i) + (-5i)^2 = 3^2 + 2\cdot 3\cdot(-5i) + (-5)^2\cdot i^2 =$
$9 - 30i + 25\cdot i^2 = 9 - 30i + 25\cdot(-1) = 9 - 30i - 25 =$
$= -16 - 30i$
Ezután már csak a konjugálás van hátra.
$\overline{(z_1^2)} = \overline{-16-30i} = -16+30i$
Az előbb megállapítottuk, hogy az összeadás és a konjugálás sorrendje felcserélhető. Ezen feladat után az a kérdés vetődik fel, hogy vajon a négyzetre emelés, és a konjugálás sorrendje is felcserélhető-e, azaz ugyanezt az eredményt kapjuk-e, ha a komplex számnak először konjugáltját vesszük, s azt emeljük négyzetre. Végezzük el most ilyen sorrendben a műveleteket. Ez képletben a következő módon írható: $(\overline{z_1})^2$

$\overline{z_1} = \overline{(3-5i)} = 3+5i$

Ezután jöhet a négyzetre emelés.

$(\overline{z_1})^2 = (3+5i)^2 = 3^2 + 2\cdot 3\cdot(5i) + (5i)^2 =$

$= 9+30i+25i^2 = 9+30i+25\cdot(-1) = 9+30i-25 = -16+30i$

Amint látható, a műveletek ilyen sorrendje esetén is ugyanazt kaptuk. Általánosan is igaz, hogy a négyzetre emelés és a konjugálás sorrendje felcserélhető, azaz $\overline{(z^2)} = (\overline{z})^2$. Még általánosabban hasonlót mondhatunk ki a szorzás és a konjugálás sorrendjét illetően, mely képletben $\overline{z_1}\cdot\overline{z_2} = \overline{z_1\cdot z_2}$ alakban írható.

(c) Most két komplex szám osztása a feladat. Ezt úgy hajtjuk végre, hogy a nevező konjugáltjával bővítünk.

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{3-5i}{4+2i} = \dfrac{3-5i}{4+2i}\cdot\dfrac{4-2i}{4-2i} = \dfrac{(3-5i)\cdot(4-2i)}{(4+2i)\cdot(4-2i)}$

Két szorzást kell elvégeznünk, egyet a számlálóban, egyet pedig a nevezőben. Nézzük először a számlálót, immár kicsit kevésbe részletesen írva, mint eddig.

$(3-5i)\cdot(4-2i) = 12-6i-20i+10i^2 = 12-6i-20i-10 = 2-26i$

Ezután foglalkozzunk a nevezővel.

$(4+2i)\cdot(4-2i) = 16-8i+8i-4i^2 = 16-8i+8i+4 = 20$

Ezt egyszerűbben is megkaphattuk volna. Mivel komplex szám a saját konjugáltjával van szorozva, ezért a két tényező csak az egyik tag előjelében tér el. Középiskolából pedig ismerünk egy összefüggést az ilyen szorzatokra. Eszerint $(x+y)\cdot(x-y) = x^2-y^2$. Ha ezt használjuk a nevezőben a szorzat számolásához, akkor a következőt írhatjuk:

$(4+2i)\cdot(4-2i) = 4^2-(2i)^2 = 16-4i^2 = 16-4\cdot(-1) = 16+4 = 20$

Térjünk vissza az osztáshoz.

$\dfrac{(3-5i)\cdot(4-2i)}{(4+2i)\cdot(4-2i)} = \dfrac{2-26i}{20}$

Mivel a nevezőben egy valós szám áll, ha külön osztjuk a számlálóban levő tagokat, akkor egy algebrai alakú komplex számot kapunk.

$\dfrac{2-26i}{20} = \dfrac{2}{20} - \dfrac{26i}{20} = \dfrac{1}{10} - \dfrac{13}{10}i = 0.1-1.3i$

Mielőtt a következő feladatra lépnénk, ejtsünk pár szót az osztásnál a nevezőben álló szorzatról. Ilyenkor egy komplex számot mindig a saját konjugáltjával szorzunk, azaz a nevezőben

$(a+bi)\cdot(a-bi)$ típusú szorzat áll. Felhasználva a korábban említett $(x+y)\cdot(x-y) = x^2-y^2$ középiskolai azonosságot, végezzük el ezt a szorzást.

$(a+bi)\cdot(a-bi) = a^2-(bi)^2 = a^2-(b)^2\cdot i^2 = a^2-(b)^2\cdot(-1) = a^2+b^2$

Azaz ilyen esetben a komplex szám valós és képzetes részének négyzetösszegét kapjuk. Ha ezt megjegyezzük, akkor az osztást gyorsabban tudjuk elvégezni.

(d) Amint az előbb is, egy osztást kell elvégeznünk. Bővítsünk a nevező konjugáltjával.

$$\frac{i}{z_1} = \frac{i}{3-5i} = \frac{i}{3-5i} \cdot \frac{3+5i}{3+5i} = \frac{i \cdot (3+5i)}{(3-5i) \cdot (3+5i)}$$

A számlálóban bontsuk fel a zárójelet, a nevezőben pedig használjuk fel azt, amit az előbb megállapítottunk. Eszerint, ha a komplex számot saját konjugáltjával szorozzuk, akkor a valós és képzetes rész négyzetének összegét kapjuk.

$$\frac{i \cdot (3+5i)}{(3-5i) \cdot (3+5i)} = \frac{3i+5i^2}{3^2+(-5)^2} = \frac{3i+5\cdot(-1)}{9+25} = \frac{-5+3i}{34} =$$
$$= -\frac{5}{34} + \frac{3}{34}i$$

3. **Feladat:** Határozzuk meg a $z = \dfrac{7-17i}{3+2i} - (3-i^9)$ komplex szám algebrai alakját!

Megoldás: A feladat több részletből áll. El kell végezni egy osztást, meg kell határozni i^9-t, s végül egy kivonást kell végrehajtani. Kezdjük az osztással.

$$\frac{7-17i}{3+2i} = \frac{(7-17i)\cdot(3-2i)}{(3+2i)\cdot(3-2i)} = \frac{21-14i-51i+34i^2}{3^2+2^2} =$$
$$= \frac{21-14i-51i+34\cdot(-1)}{9+4} = \frac{21-14i-51i-34}{13} = \frac{-13-65i}{13} =$$
$$= -\frac{13}{13} - \frac{65}{13}i = -1-5i$$

Ezután határozzuk meg i^9-t!

$$i^9 = i^{(4\cdot 2+1)} = \left(i^4\right)^2 \cdot i^2 = 1^2 \cdot i^1 = i^1 = i$$

A részeredményeket felhasználva határozzuk meg z algebrai alakját.

$$z = \frac{7-17i}{3+2i} - (3-i^9) = (-1-5i)-(3-i) = (-1-3)+(-5+1)i = -4-4i$$

4. **Feladat:** Határozzuk meg a $z = (3+2i)(5+4i-\overline{7-3i})$ komplex szám képzetes részét!

Megoldás: Meg kell határoznunk z algebrai alakját, melyből a képzetes rész már könnyen kiolvasható. Ehhez végezzük el a műveleteket. Elsőként hajtsuk végre a konjugálást. Ne feledkezzünk el arról, hogy minden úgymond 'hosszú' műveleti jel egyben zárójel is, és ha elvégezzük a műveletet, utána ki kell tenni a zárójelet. Most ez azt jelenti, hogy a $7-3i$ konjugáltját zárójelbe kell tenni.

$z = (3+2i)(5+4i-\overline{7-3i}) = (3+2i)(5+4i-(7+3i))$

Ezután végezzük el a kivonást.

$z = (3+2i)(5+4i-(7+3i)) = (3+2i)(5+4i-7-3i) = (3+2i)(-2+i)$

Következik egy szorzás.

$z = (3+2i)(-2+i) = -6+3i-4i+2i^2 = -6+3i-4i-2 = -8-i$

Megvan tehát z algebrai alakja. A képzetes rész ebben az i együtthatója, azaz jelen esetben a -1.

5. **Feladat:** Oldjuk meg az $x^2+4x+5=0$ egyenletet a komplex számok halmazán!

   Megoldás: Egy másodfokú egyenletet kell megoldanunk, így csak be kell helyettesítenünk a megoldóképletbe.

   $x_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2-4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2}$

   Amint látható, negatív szám áll négyzetgyök alatt. Ezt a műveletet a valós számok halmazán nem tudjuk elvégezni, tehát az egyenletnek valós gyöke nincs. Elvégezhető azonban a komplex számok halmazán. Olyan komplex számot, vagy számokat kell keresnünk, melynek négyzete -4-gyel egyenlő. Írjuk ehhez a -4-et $4\cdot(-1)$ alakban. Szorzatból tényezőnként vonhatunk gyököt, tehát külön kereshetünk olyan számot, melynek négyzete 4, s melynek négyzete -1. Tudjuk, hogy $4=2^2$ és $-1=i^2$. Ezek alapján $-4 = 2^2\cdot i^2 = (2i)^2$. Találtunk tehát olyan komplex számot, aminek a négyzete -4 , így a komplex számok halmazán elvégezhető ez a gyökvonás. A komplex számok halmazán azonban egy z szám négyzetgyökének nevezünk minden olyan komplex számot, amelynek négyzete z-vel egyenlő. Nyilvánvaló, hogy nem csak a $2i$, hanem a $-2i$ négyzete is -4-gyel egyenlő. Belátható, hogy a 0 kivételével minden z komplex szám esetén két olyan komplex szám létezik, melynek négyzete z-vel egyenlő, tehát a 0-n kívül minden komplex számnak két négyzetgyöke van. Ez azt jelenti, hogy $\sqrt{-4} = \pm 2i$, hiszen ez az a két komplex szám, melynek négyzete -4.

   Mivel a komplex számok esetében két négyzetgyök van, ezért komplexben felesleges $\pm$-t írni a gyökjel elé a megoldóképletben, mert a négyzetgyökvonásnak két eredménye lesz majd, s abban jelenik meg a $\pm$.

   Írjuk be a gyökvonás eredményét a megoldóképletbe.

   $$x_{1,2} = \frac{-4+\sqrt{-4}}{2} = \frac{-4\pm 2i}{2} = \begin{cases} \dfrac{-4+2i}{2} = -2+i \\ \dfrac{-4-2i}{2} = -2-i \end{cases}$$

   Amint látható, az egyenletnek két komplex szám a megoldása.

Mielőtt áttérnénk a következő feladatra, két dolgora szeretném felhívni a figyelmet.

Egyrészt arra, hogy a komplex számok halmazán negatív valós számokból is lehet négyzetgyököt vonni. Ezt könnyen végrehajthatjuk úgy, hogy a negatív számot egy pozitív valós szám és a -1 szorzatára bontjuk, majd ezután tényezőnként vonunk gyököt. Tudjuk, hogy $\sqrt{-1} = \pm i$.

Másrészt pedig arra, hogy ha komplexben vonunk gyököt, akkor a pozitív valós számoknak is két négyzetgyöke van, mert komplexben a z szám négyzetgyökének nevezünk minden olyan számot, aminek négyzete z. A komplex számok halmazán például $\sqrt{9} = \pm 3$, és nem csak a 3. Persze a valós számok halmazán $\sqrt{9} = 3$, ott a definíció szerint csak egy négyzetgyök van.

6. **Feladat:** Oldjuk meg az $x^2+2ix+15 = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán!

   Megoldás: Most is másodfokú egyenletet kell megoldanunk, így csak be kell helyettesítenünk a megoldóképletbe. Változás az előző feladathoz képest, hogy most nem csak valós számok szerepelnek együtthatóként az egyenletben. Természetesen ilyenkor a komplex számokat kell behelyettesíteni a képletbe.

   $$x_{1,2} = \frac{-2i + \sqrt{(2i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15}}{2 \cdot 1} = \frac{-2i + \sqrt{-4 - 60}}{2} = \frac{-2i + \sqrt{-64}}{2}$$

   A gyökvonát hajtsuk végre külön. Mivel $-64 = 64 \cdot (-1) = 64 \cdot i^2$, ezért $\sqrt{-64} = \pm 8i$

   Az eredménnyel térjünk vissza a megoldóképlethez.

   $$x_{1,2} = \frac{-2i + \sqrt{-64}}{2} = \frac{-2i \pm 8i}{2} = \begin{cases} \dfrac{-2i + 8i}{2} = 3i \\ \dfrac{-2i - 8i}{2} = -5i \end{cases}$$

   Most is két komplex megoldást kaptunk. Ezek a megoldások azért különlegesek, mert valós részük nulla. Az ilyen számokat nevezzük tiszta képzetes számoknak.

7. **Feladat:** Oldjuk meg a $3z + \overline{z} = 16 - 4i$ egyenletet.

   Megoldás: Az egyenletben szerepel ismeretlenként egy komplex szám és annak konjugáltja is. Ilyen esetben célszerű az ismeretlen komplex számot általánosan algebrai alakban felírni, mert abból könnyen előállítható a konjugált is. Egy komplex szám algebrai alakja általánosan a következő: $z = a + bi$, ahol a és b valós számok. Azaz egy komplex ismeretlen két valós ismeretlent jelent. Ebből feírjuk a konjugáltat: $\overline{z} = a - bi$. Helyettesítsük be az algebrai alakokat az egyenletben z és $\overline{z}$ helyére.

$3(a + bi) + (a - bi) = 16 - 4i$

Az egyenlet bal oldalán végezzük el a műveleteket, azaz bontsuk fel a zárójeleket, és vonjuk össze a valós illetve képzetes részeket.

$3a + 3bi + a - bi = 16 - 4i$

$4a + 2bi = 16 - 4i$

Két komplex szám csak úgy lehet egyenlő, ha külön a valós részeik is megegyeznek, és külön a képzetes részeik is egyenlők. Így a komplex egyenletet felbonthatjuk egy két egyenletből álló egyenletrendszerre.

A valós részek egyenlőségéből a $4a = 16$ egyenletet kapjuk, amiből $a = 4$ következik.

A képzetes részek egyenlősége a $2b = -4$ egyenletet jelenti, melyből $b = -2$ következik.

Mivel meghatároztuk az ismeretlen komplex szám valós és képzetes részét is, így felírhatjuk az egyenlet megoldását.

$z = a + bi = 4 - 2i$

1.2. Összetett feladatok

1. **Feladat:** Határozzuk meg a $z = \dfrac{1 - i^2 + i^4 - i^6 + \cdots - i^{18}}{1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^9}$ komplex szám algebrai alakját!

Megoldás: Először a számlálóban és a nevezőben álló kifejezések algebrai alakját kell meghatározni, majd utána elvégezni az osztást.

Kezdjük a számlálóval. Az i-nek csak páros kitevőjű hatványai szerepelnek, melyek vagy 1-gyel, vagy -1-gyel egyenlőek. Ha a kitevő osztható 4-gyel, akkor a hatvány 1, ha nem osztható 4-gyel, akkor a hatvány -1. Írjuk be ezeket az i hatványai helyére.

$1 - i^2 + i^4 - i^6 + \cdots - i^{18} = 1 - (-1) + 1 - (-1) + \cdots - (-1) =$

$= 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots + 1$

A számlálóban tehát csupa egyest kell összadnunk. Már csak az a kérdés, hogy hány darabot. Mivel a legnagyobb kitevő 18, a legkisebb pedig 0, és kettesével változik, ezért 10 darab tag van, azaz a számlálóban $10 \cdot 1 = 10$ áll.

Ezután foglalkozzunk a nevezővel. Itt is írjuk be i különböző hatványainak az értékét.

$1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^9 = 1 + i + (-1) + (-i) + \cdots + i$

Tudjuk, hogy az i hatványai periodikusan ismétlődnek, s csupán négy különböző hatvány van. Az összeg elején pontosan 4 hatványt írtunk ki, ami egy periódust alkot. Kapcsoljunk össze zárójellel egy-egy ilyen periódust.

$1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^9 = 1 + i + (-1) + (-i) + \cdots + i = = [1 + i + (-1) + (-i)] + [\cdots] + 1 + i$

Látható, hogy egy perióduson belül az összeg 0 lesz, hiszen szerepel benne az 1 és a -1, valamint az i és a $-i$. Így csak az a kérdés, hogy hány tag marad még a teljes periódusokon kívül. Mivel itt is 10 tag van, így az utolsó kettő marad meg, azaz a nevező $1 + i$-vel egyenlő.

Ezután térjünk vissza a részeredményekkel a törthöz.

$$z = \frac{1 - i^2 + i^4 - i^6 + \cdots - i^{18}}{1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^9} = \frac{10}{1 + i}$$

Már csak egy osztást kell elvégeznünk.

$$z = \frac{10}{1 + i} = \frac{10 \cdot (1 - i)}{(1 + i) \cdot (1 - i)} = \frac{10 - 10i}{1^2 + 1^2} = \frac{10 - 10i}{2} = 5 - 5i$$

2. **Feladat:** Oldjuk meg a $\dfrac{(2 + i) \cdot z}{2 + 6i} = \overline{1 - 2i^6 - i^7}$ egyenletet!

   Megoldás: Végezzük el az egyenlet jobb oldalán a műveleteket, majd fejezzük ki az ismeretlent. Első lépésként helyettesítsük be i hatványainak értékét. Mivel $i^6 = -1$ és $i^7 = -i$, így az egyenlet a következő alakot ölti.

$$\frac{(2 + i) \cdot z}{2 + 6i} = \overline{1 - 2 \cdot (-1) - (-i)}$$

Ezután vonjunk össze a jobb oldalon.

$$\frac{(2 + i) \cdot z}{2 + 6i} = \overline{3 + i}$$

Most végezzük el a konjugálást.

$$\frac{(2 + i) \cdot z}{2 + 6i} = 3 - i$$

Itt feltétlenül álljunk meg egy pillanatra! Meg kell jegyezni, hogy a konjugálás nem azt jelenti, hogy minden olyan tag előjelét megváltoztatjuk, amiben az i szerepel. A konjugálás során csak a képzetes rész előjele változik. Ebben a feladatban jól látható, hogy az eredeti felírásban két tag is tartalmazza az i-t, de mégis csak az egyik előjelét kell megváltoztatni. Az i^7 valóban képzetes, hiszen $-i$-vel egyenlő, de az i^6 valós, hiszen -1-gyel egyenlő.

Térjünk vissza az egyenlet megoldásához. Most szorozzuk az egyenlet mindkét oldalát $2 + 6i$-vel, és osszuk mindkét oldalt $2 + i$-vel. Így kifejezzük az ismeretlent.

$$z = \frac{(3 - i)(2 + 6i)}{2 + i}$$

El kell még végezni a jobb oldalon a műveleteket. Írjuk le külön a számlálóból a szorzást.

$(3-i)(2+6i) = 6+18i-2i-6i^2 = 6+18i-2i+6 = 12+16i$

Helyettesítsük ezt be, majd végezzük el az osztást.

$$z = \frac{12+16i}{2+i} = \frac{(12+16i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{24-12i+32i-16i^2}{2^2+1^2} =$$
$$= \frac{24-12i+32i+16}{4+1} = \frac{40+20i}{5} = 8+4i$$

A megoldás tehát $z = 8+4i$.

3. **Feladat:** Ha tudjuk, hogy $(x+y)+(x-y)i = (1+i)^2 + \frac{1}{i}$, mivel egyenlő az x és y valós szám?

   Megoldás: Az egyenlet jobb oldalán végezzük el a műveleteket, és írjuk fel az ott álló komplex számot algebrai alakban. Számoljunk részletekben.

   $(1+i)^2 = 1^2+2i+i^2 = 1+2i-1 = 2i$

   $$\frac{1}{i} = \frac{1\cdot(-i)}{i\cdot(-i)} = \frac{-i}{0^2+1^2} = \frac{-i}{1} = -i$$

   (Itt is ugyanúgy végeztük el az oszást, mint az eddigiekben, azaz a nevező konjugáltával bővítettük a törtet. A nevezőben $i = 0+i$ állt, s ennek konjugáltával $0-i = -i$-vel bővítettünk.)

   Helyettesítsük be a részeredményeket az egyenletbe.

   $(x+y)+(x-y)i = 2i-i = i$

   Mivel x és y valós számok, ezért $x+y$ és $x-y$ is valós szám. Ez azt jelenti, hogy az egyenlet bal oldalán tulajdonképpen egy komplex szám áll, melynek valós része $x+y$, s képzetes része $x-y$. Arra hivatkozhatunk ismét, hogy két komplex szám akkor és csak akkor egyenlő, ha külön a valós, és a képzetes részeik is egyenlők. A jobb oldal valós része 0, képzetes része pedig 1, hiszen $i = 0+1\cdot i$. A komplex egyenletből így az alábbi két egyenletből álló egyenletrendszert kapjuk.

   $$\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=1 \end{cases}$$

   Meg kell oldanunk az egyenletrendszert.

   Adjuk össze a két egyenletet, így a $2x = 1$ egyenletet kapjuk, amiből $x = \frac{1}{2}$.

   Ha kivonjuk a két egyenletet, akkor a $2y = -1$ egyenletet kapjuk, amiből $y = -\frac{1}{2}$.

   (Miután megkaptuk x értékét, természetesen y-t valamelyik egyenletbe történő visszahelyettesítéssel is megkaphattuk volna.)

   A feladat megoldása: $x = \frac{1}{2}$ és $y = -\frac{1}{2}$.

4. **Feladat:** Oldjuk meg a $z^2 - 2\overline{z} = 0$ egyenletet!

   Megoldás: Olyan egyenletet kell megoldanunk, amiben egy komplex ismeretlen, és annak konjugáltja is szerepel. Mint egy korábbi feladatban, most is célszerű felírni általánosan az ismeretlen algebrai alakját, mert ebből felírható a konjugált is.

   $z = a + bi$ és $\overline{z} = a - bi$

   Helyettesítsük be ezeket az egyenletbe.

   $(a + bi)^2 - 2(a - bi) = 0$

   Végezzük el a négyzetre emelést, és bontsuk fel a zárójelet.

   $a^2 + 2abi + (bi)^2 - 2a + 2bi = 0$

   $a^2 + 2abi + b^2i^2 - 2a + 2bi = 0$

   $a^2 + 2abi - b^2 - 2a + 2bi = 0$

   Csoportosítsuk ezután a bal oldalon a tagokat úgy, hogy külön a valósakat, és külön a képzeteseket.

   $(a^2 - b^2 - 2a) + (2ab + 2b)i = 0$

   Használjuk fel, hogy két komplex szám csak úgy lehet egyenlő, ha külön a valós részeik is, és külön a képzetes részeik is megegyeznek. A jobb oldalon 0 áll, ami azt jelenti, hogy ott a valós és képzetes rész is 0, hiszen a 0 komplex szám algebrai alakja $0 + 0i$. Így a komplex egyenletből az alábbi egyenletrendszert kapjuk.

   A valós részek egyenlősége: $a^2 - b^2 - 2a = 0$

   A képzetes részek egyenlősége: $2ab + 2b = 0$

   A második egyenlettel célszerű először foglalkozni, mert annak bal oldalán kiemelhető $2b$.

   $2b(a + 1) = 0$

   Ez azért jó, mert egy szorzat csak úgy lehet 0, ha valamelyi tényezője 0. Így két eset fordulhat elő. Az első eset, ha $2b = 0$, amiből $b = 0$ következik, a második pedig, ha $a + 1 = 0$, amiből $a = -1$ következik.

   Innentől tehát két ágon folytatódik a megoldás.

   Az első esetben $b = 0$.

   Ezt helyettesítsük be a valós részek egyenlőségét leíró egyenletbe.

   $a^2 - 0^2 - 2a = 0$, azaz $a^2 - 2a = 0$.

   Az egyenlet bal oldalán kiemelhető a.

   $a(a - 2) = 0$

   Mivel ismét szorzat egyenlő 0-val, ezért két eset van. Egyrészt $a = 0$, másrészt pedig $a - 2 = 0$, amiből $a = 2$ következik.

Ezután már felírhatjuk az egyenlet két megoldását. A megoldásokat célszerű indexeléssel megkülönböztetni.

Az $a = 0$ és $b = 0$ számpárból kapjuk a $z_1 = 0 + 0i = 0$ megoldást.

Az $a = 2$ és $b = 0$ számpárból pedig a $z_2 = 2 + 0i = 2$ megoldást kapjuk.

Ezután foglalkozzunk a második esettel, amikor $a = -1$.

Ezt behelyettesítjük a valós részek egyenlőségét leíró egyenletbe.

$(-1)^2 - b^2 - 2(-1) = 0$, azaz $3 - b^2 = 0$.

Ennek az egyenletnek két megoldása van: $b = \sqrt{3}$ és $b = -\sqrt{3}$.

Így ebben az esetben is két (a, b) számpárt kaptunk, amelyekből az egyenletnek további két megoldása írható fel.

Az $a = -1$ és $b = \sqrt{3}$ számpárból kapjuk a $z_3 = -1 + \sqrt{3}i$ megoldást.

Az $a = -1$ és $b = -\sqrt{3}$ számpárból pedig a $z_4 = -1 - \sqrt{3}i$ megoldást kapjuk.

Végül tekintsük át az egyenlet összes megoldását. Négy darab megoldást kaptunk, melyek a következők:

$z_1 = 0$, $z_2 = 2$, $z_3 = -1 + \sqrt{3}i$ és $z_4 = -1 - \sqrt{3}i$.

5. **Feladat:** Vonjunk négyzetgyököt a $z = -5 + 12i$ komplex számból!

   Megoldás: Először fogalmazzuk át a feladatot. Olyan komplex számot, vagy számokat kell keresnünk, amelynek négyzete z-vel egyenlő. Vezessük be az $u = \sqrt{z}$ jelölést, ekkor $u^2 = z$, azaz $u^2 = -5 + 12i$. A gyökvonás tehát azt jelenti, hogy ezt az egyenletet kell megoldanunk. Mivel ebben az egyenletben az u ismeretlen komplex, ezért az előző feladathoz hasonlóan célszerű az általános algebrai alakból elindulni.

   $u = a + bi$.

   Helyettesítsük ezt be az egyenletbe.

   $(a + bi)^2 = -5 + 12i$

   Végezzük el a négyzetre emelést.

   $a^2 + 2abi + (bi)^2 = -5 + 12i$

   $a^2 + 2abi + b^2i^2 = -5 + 12i$

   $a^2 + 2abi - b^2 = -5 + 12i$

   Csoportosítsunk ezután a bal oldalon, külön a valós tagokat, s kölün a képzetes tagokat.

   $(a^2 - b^2) + 2abi = -5 + 12i$

   A komplex egyenletet ismét egyenletrendszerré alakíthatjuk, mert felírhatjuk külön a valós részek, és külön a képzetes részek egyenlőségét.

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -5 \\ 2ab = 12 \end{cases}$$

A második egyenletből fejezzük ki b-t.

$$b = \frac{6}{a} \tag{*}$$

Helyettesítsük ezt be az első egyenletbe.

$$a^2 - \left(\frac{6}{a}\right)^2 = -5$$

Végezzük el a négyzetre emelést.

$$a^2 - \frac{36}{a^2} = -5$$

Szorozzunk a^2-tel.

$$a^4 - 36 = -5a^2$$

Rendezzük 0-ra az egyenletet.

$$a^4 + 5a^2 - 36 = 0$$

Célszerű az a^2 helyére egy új ismeretlent bevezetni, mert így az egyenlet visszavezethető másodfokú egyenletre. Legyen pl. $t = a^2$. Ekkor az egyenlet a $t^2 + 5t - 36 = 0$ alakot ölti.

Írjuk fel a megoldóképletet. (Mivel t valós, ezért kiírjuk a $\pm$-t.)

$$t_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36)}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{169}}{2} = \begin{cases} \dfrac{-5+13}{2} = 4 \\ \dfrac{-5-13}{2} = -9 \end{cases}$$

Mivel az a valós számot jelöl, így négyzete nem lehet negatív. Ebből következik, hogy a második megoldás, a -9 hamis gyök, csak a $t = 4$ megoldásssal kell foglalkoznunk. Mivel $t = a^2$, ezért az $a^2 = 4$ egyenletet kapjuk, aminek két megoldása van, az $a_1 = 2$ és az $a_2 = -2$.

Helyettesítsük be ezeket a (*)-gal jelölt egyenletbe.

$$b_1 = \frac{6}{a_1} = \frac{6}{2} = 3$$

$$b_2 = \frac{6}{a_1} = \frac{6}{-2} = -3$$

Ezután felírhatjuk a megoldásokat. Két (a, b) számpárt kaptunk, így két megoldás van.

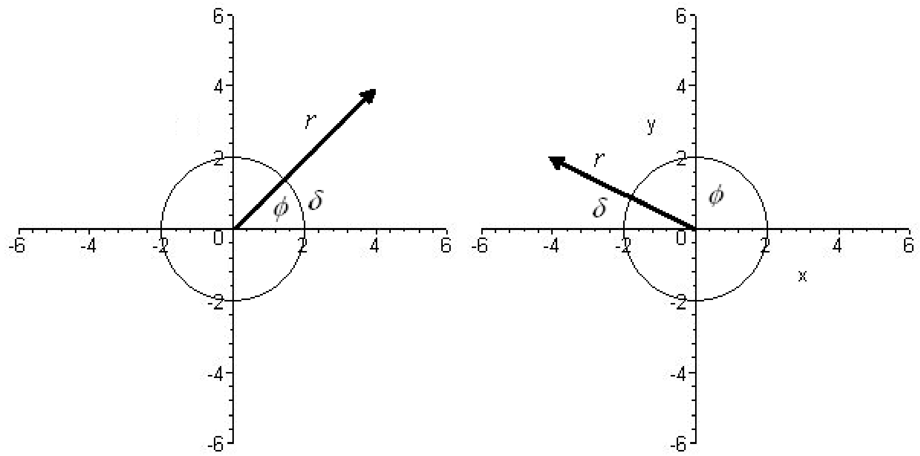
Az $a = 2$ és $b = 3$ számpárból kapjuk az $u_1 = 2 + 3i$ megoldást.

Az $a = -2$ és $b = -3$ számpárból pedig az $u_2 = -2 - 3i$ megoldást kapjuk.

Mivel $u = \sqrt{z}$, ezért az eredményt a következő módon is írhatjuk:

$\sqrt{z} = \pm(2 + 3i)$.

Megjegyzés: Amint a feladatból látható, a négyzetgyökvonást algebrai alakban is el lehet végezni a komplex számok körében. Általában azonban nem ez a legcélszerűbb eljárás. A gyökvonást célszerűbb trigonometrikus alakban végrehajtani. Úgy nem csak négyzetgyököt, hanem bármilyen kitevőjű gyököt lehet vonni a komplex számokból.



1. ábra. z_1 és z_2

2. Komplex számok trigonometrikus alakja

2.1. Alapfeladatok

1. **Feladat:** Határozzuk meg az alábbi algebrai alakban adott komplex számok trigonometrikus alakját!

   $z_1 = 4 + 4i, \quad z_2 = -4 + 2i, \quad z_3 = -3 - 3\sqrt{3}i, \quad z_4 = 3 - 5i,$

   $z_5 = 3, \quad z_6 = -4, \quad z_7 = 5i, \quad z_8 = -6i$

   Megoldás: Ha algebrai alakról térünk át trigonometrikus alakra, akkor két dolgot kell meghatároznunk. Egyrészt a komplex szám abszolút értékét (r), amit a komplex szám hosszának is szoktak nevezni, másrészt a kopmlex szám argumentumát (φ), amit irányszögnek is neveznek. Ezek meghatározására az $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ és $a \neq 0$ esetén a $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{b}{a}$ összefüggések állnak rendelkezésünkre.

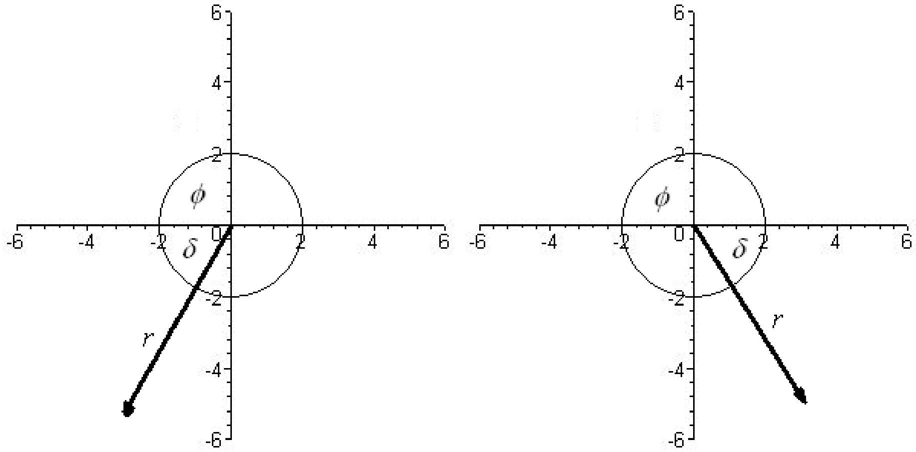
   Ezek alapján z_1 esetén $r = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

   Az irányszög esetén célszerű a következő módon eljárni. Először a $\operatorname{tg} \delta = \left|\dfrac{b}{a}\right|$ összefüggésből egy segédszöget határozunk meg, mely biztosan hegyesszög. Ezután ábrázoljuk a komplex számot, s attól függően, hányadik síknegyedbe esik a szám, a segédszögből határozzuk meg az irányszöget, azaz φ-t.

   Most $\operatorname{tg} \delta = \left|\dfrac{4}{4}\right| = 1$. Ebből visszakeresve $\delta = 45°$.

   Most készítsünk egy vázlatos ábrát a komplex szám elhelyezkedéséről a számsíkon.

   Mivel z_1 az első síknegyedben helyezkedik le, így $\varphi = \delta = 45°$.



2. ábra. z_3 és z_4

Ezek alapján z_1 trigonometrikus alakja a következő:

$z_1 = 4\sqrt{2}(\cos 45° + i \sin 45°)$

Ezután foglalkozzunk z_2-vel.

$r = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$\operatorname{tg} \delta = \left| \dfrac{2}{-4} \right| = \dfrac{1}{2}$

Ebből visszakeresve $\delta \cong 26.57°$.

Most nem kapjuk meg teljes pontossággal δ értékét, mert nem nevezetes szögről van szó. Ennek következtében a trigonometrikus alak is csak közelítőleg fogja megadni z_2-t. A φ szög meghatározásához készítsünk ábrát z_2-ről.

Az ábrán látható, hogy z_2 a második síknegyedbe esik, és itt a $\varphi + \delta = 180°$ összefüggés teljesül. Ezért $\varphi = 180° - \delta \cong 180° - 26.57° = 153.43°$

Ezek alapján z_2 közelítő trigonometrikus alakja a következő:

$z_2 \cong 2\sqrt{5}(\cos 153.43° + i \sin 153.43°)$.

Következhet z_3.

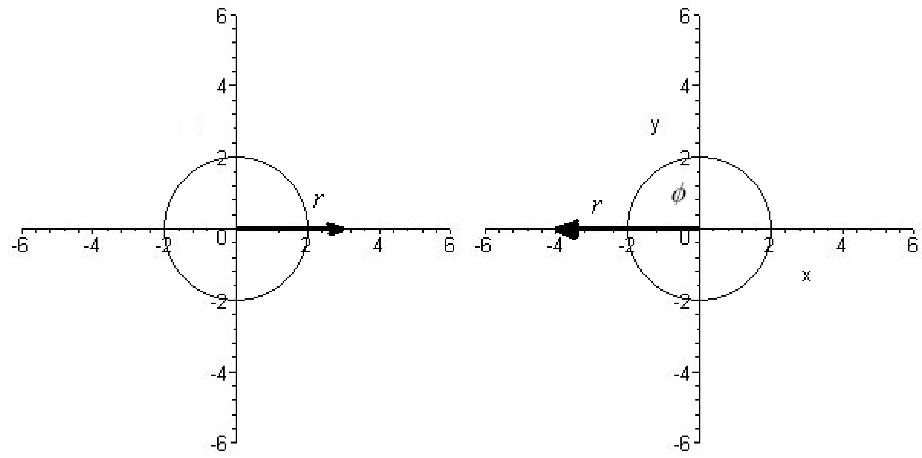
$r = \sqrt{(-3)^2 + (-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{36} = 6$

$\operatorname{tg} \delta = \left| \dfrac{-3\sqrt{3}}{-3} \right| = \sqrt{3}$

Ebből visszakeresve $\delta = 60°$.

Ábrázoljuk a z_3 komplex számot.

Az ábráról leolvasható, hogy ez a szám a harmadik síknegyedbe esik, és itt a $\varphi = 180° + \delta$ összefüggés teljesül. Jelen esetben $\varphi = 180° + 60° = 240°$.



3. ábra. z_5 és z_6

Ezek alapján z_3 trigonometrikus alakja a következő:

$z_3 = 6(\cos 240° + i \sin 240°)$.

Ezután foglalkozzunk z_4-gyel.

$r = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$

$\operatorname{tg} \delta = \left| \frac{-5}{3} \right| = \frac{5}{3}$

Ebből visszakeresve $\delta \cong 59.04°$.

Most sem kaptunk pontos értéket δ-ra, így z_4-nek is csak közelítő trigonometrikus alakját tudjuk majd felírni.

Ábrázoljuk a z_4 komplex számot.

Az ábráról leolvasható, hogy ez a szám a negyedik síknegyedbe esik, ahol a $\varphi + \delta = 360°$ összefüggés teljesül.

Ebből $\varphi \cong 360° - 59.04° = 300.96°$.

Ezek alapján z_4 trigonometrikus alakja a következő:

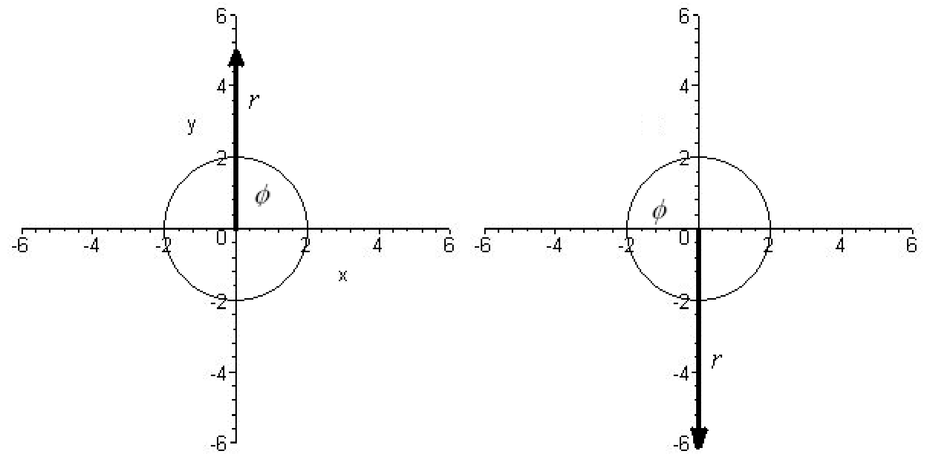
$z_4 = \sqrt{34}(\cos 300.96° + i \sin 300.96°)$.

Térjünk át ezek után z_5 trigonometrikus alakjának meghatározására.

A komplex szám abszolút értékét meghatározhatjuk úgy is, mint a korábbiakban. Kapjuk $r = \sqrt{3^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$. Ezt azonban most egyszerűbben is megkaphattuk volna, ha ábrázoljuk z_5-öt.

Mivel z_5 valós szám, így az ábráról is leolvasható a számot szemléltető vektor hossza, hiszen tengellyel párhuzamos vektorról van szó. Ebből is látható, hogy $r = 3$.

Sőt az ábráról leolvasható a komplex szám argumentuma is, hiszen a számot szemléltető vektor az x tengely pozitív irányába mutat, ezért



4. ábra. z_7 és z_8

$\varphi = 0°$. Persze használhattuk volna a $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b}{a}$ összefüggést is, mint a korábbiakban, de az ábráról leolvasva φ-t, sokkal gyorsabban érünk célba.

Ezek után z_5 trigonometrikus alakja a következő:

$z_5 = 3(\cos 0° + i \sin 0°)$.

Következzen z_6.

Most is valós számról van szó, így célszerű úgy eljárnunk, mint z_5 esetében. Készítsünk ábrát, s arról olvassuk le az abszolút értéket, valamint az argumentumot. A komplex számot szemléltető vektor hossza nyilván 4, azaz $r = 4$. A vektor a valós tengely pozitív irányával 180°-os szöget zár be, tehát $\varphi = 180°$.

Ebből z_6 trigonometrikus alakja a következő:

$z_6 = 4(\cos 180° + i \sin 180°)$.

Térjünk át z_7-re.

Most nem valós számról van szó, de mégis eljárhatunk úgy, mint z_5 és z_6 esetében, mert ez a komplex szám egy tiszta képzetes szám. Ha ábrát készítünk róla, akkor az ábráról le tudunk olvasni mindent. Sőt most φ-t nem is tudjuk a $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b}{a}$ összefüggésből meghatározni, hiszen $a = 0$.

A komplex számot szemléltető vektor most az y tengellyel párhuzamos, és függőlegesen felfelé mutat. Hossza nyilván 5, azaz $r = 5$, s a valós tengely pozitív irányával pedig 90°-ot zár be, tehát $\varphi = 90°$.

Ebből z_7 trigonometrikus alakja a következő:

$z_7 = 5(\cos 90° + i \sin 90°)$.

Végül foglalkozzunk z_8-cal.

Ismét elég ábrát készítenünk, és arról leolvasni az adatokat.

A komplex számot szemléltető vektor most is az y tengellyel párhuzamos, de most függőlegesen lefelé mutat. Hossza nyilván 6, azaz $r = 6$, s a valós tengely pozitív irányával pedig 270°-ot zár be, tehát $\varphi = 270°$.

Ebből z_8 trigonometrikus alakja a következő:

$z_8 = 6(\cos 270° + i \sin 270°)$.

Megjegyzés: Amint látható, általánosságban a komplex számok trigonometrikus alakjának meghatározásához az $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ és $a \neq 0$ esetén a $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$ összefüggéseket használjuk. Azonban ha a komplex szám valós, vagy tiszta képzetes, akkor egyszerűen ábráról leolvashatunk mindent, ugyanis ilyenkor a komplex számot szemléltető vektor valamelyik tengelyre esik. Mivel tiszta képzetes számok esetén $a = 0$, ezért ilyenkor a $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$ összefüggésből φ nem határozható meg. Ekkor csak az ábráról tudjuk leolvasni φ-t.

2. **Feladat:** Határozzuk meg az alábbi trigonometrikus alakban megadott komplex számok algebrai alakját!

$z_1 = 7(\cos 135° + i \sin 135°)$, $\quad z_2 = 7(\cos 256° + i \sin 256°)$,

$z_3 = 8(\cos 180° + i \sin 180°)$, $\quad z_4 = 2(\cos 90° + i \sin 90°)$,

Megoldás: Az előző feladatban algebrai alakban megadott komplex számok trigonometrikus alakjának meghatározása volt a feladat, most fordított a kérdés. Ilyenkor egyszerűbb helyzetben vagyunk, mint az előbb. Csak annyit kell tennünk, hogy meghatározzuk $\cos \varphi$ és $\sin \varphi$ értékét, majd utána felbontjuk a zárójelet. Hajtsuk ezt végre először z_1 esetében.

$\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ és $\sin 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Írjuk be ezeket az értékeket a trigonometrikus alakba.

$$z_1 = 7(\cos 135° + i \sin 135°) = 7\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

A zárójel felbontása után megkapjuk az algebrai alakot.

$$z_1 = -\frac{7\sqrt{2}}{2} + \frac{7\sqrt{2}}{2}i$$

Járjunk el ugyanígy z_2 esetében is.

$\cos 256° \cong -0.2419$ és $\sin 256° \cong -0.9703$

A szögfüggvények értékét most csak közelítőleg tudtuk meghatározni, mert φ nem nevezetes szög volt. Így nyilván csak közelítőleg fogjuk megkapni a komplex szám algebrai alakját is.

$z_2 = 7(\cos 256° + i \sin 256°) \cong 7(-0.2419 + i(-0.9703))$

$z_2 \cong -1.693 - 6.792i$

Következzen z_3.

$\cos 180° = -1$ és $\sin 180° = 0$

Ezeket felhasználva:

$z_3 = 8(\cos 180° + i \sin 180°) = 8(-1 + i \cdot 0) = -8$

Amint látható, ez a komplex szám egyben negatív valós szám is.

Végül jöjjön z_4.

$\cos 90° = 0$ és $\sin 90° = 1$

Ezekből z_4 algebrai alakja:

$z_4 = 2(\cos 90° + i \sin 90°) = 2(0 + i \cdot 1) = 2i$

Amint az algebrai alakból látható, most egy tiszta képzetes számról van szó.

3. **Feladat:** Határozzuk meg a $z = -4(\sin 150° - i \cos 240°)$ komplex szám trigonometrikus alakját.

   Megoldás: A feladat talán kicsit furcsának tűnik, mert z olyan alakban van felírva, melyben szerepel sin és cos, így nagyon hasonlít egy trigonometrikus alakhoz. A valóságban azonban ez nem trigonometrikus alak. Több okból sem. Például egy trigonometrikus alakban nem állhat negatív szorzó a zárójel előtt, hiszen ott a komplex szám abszolút értékének kell állni, ami nem negatív. Ezen kívül az is látható, hogy nem ugyanazon szögnek szerepel a sin-a és cos-a. Továbbá a sin-t és cos-t felcserélték, valamint az i előtt negatív előjel áll. Ha ezeknek csak egyike is előfordul, akkor nem trigonometrikus alakban felírt komplex számról van szó. Ilyenkor először a komplex szám algebrai alakját állítjuk elő, majd abból térünk át trigonometrikus alakra. Az algebrai alakot ugyanúgy kapjuk, mint ahogyan az előző feladatban trigonometrikus alakról áttértünk algebrai alakra. Határozzuk meg tehát a szereplő szögfüggvények értékét.

   $\cos 240° = -0.5$ és $\sin 150° = 0.5$

   Helyettesítsük be ezeket.

   $z = -4(\sin 150° - i \cos 240°) = -4(0.5 - i(-0.5)) = -2 - 2i$

   Ezután az első feladatban leírtak szerint áttérünk trigonometrikus alakra.

   $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

   $\operatorname{tg} \delta = \left| \frac{b}{a} \right| = \left| \frac{-2}{-2} \right| = 1$

   Visszakeresve kapjuk: $\delta = 45°$.

Ha ábrázoljuk a komplex számot, akkor az láthatóan a harmadik síknegyedben helyezkedik el, s itt a $\varphi = 180° + \delta$ összefüggés teljesül. (Az ábra elkészítését már az olvasóra bízzuk.) Jelen esetben $\varphi = 180° + 45° = 225°$

Ezután már felírhatjuk a szám trigonometrikus alakját.

$z = 2\sqrt{2}(\cos 225° + i \sin 225°)$

4. **Feladat:** legyen $z_1 = -3 + 3i$ és $z_2 = \sqrt{2}(\cos 315° + i \sin 315°)$ Határozzuk meg $z_1 \cdot z_2$ trigonometrikus alakját!

   Megoldás: Egy szorzatot kell meghatároznunk, de az egyik tényező algebrai alakban, a másik pedig trigonometrikus alakban van. A művelet elvégzéséhez azonos alakba kell írnunk a komplex számokat. Mivel trigonometrikus alakban kérik az eredményt, ezért célszerűbb az algebrai alakban adott számot átírni trigonometrikus alakra, s úgy elvégezni a szorzást, mert így rögtön trigonometrikus alakban fogjuk megkapni az eredményt. Első lépésként tehát írjuk át z_1-et trigonometrikus alakra.

   $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

   $\operatorname{tg} \delta = \left|\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{3}{-3}\right| = 1$

   Visszakeresve kapjuk: $\delta = 45°$.

   Ha ábrázoljuk a komplex számot, akkor az láthatóan a második síknegyedben helyezkedik el, s itt a $\varphi = 180° - \delta$ összefüggés teljesül. Most azt kapjuk: $\varphi = 180° - 45° = 135°$

   Ezután már felírhatjuk a szám trigonometrikus alakját.

   $z_1 = 3\sqrt{2}(\cos 135° + i \sin 135°)$

   Most végezzük el a szorzást. Trigonometrikus alakú komplex számok szorzása esetén a szorzat abszolút értéke a számok abszolút értékének szorzatával egyenlő, s a szorzat argumentuma pedig a tényezők argumentumának összegével. Ez képletben az alábbi alakban írható. Legyen $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$,

   ekkor $z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2)(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.

   Jelen esetben ez a következőt jelenti:

   $z_1 \cdot z_2 = (3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2})(\cos(135° + 315°) + i \sin(135° + 315°)) = 6(\cos 450° + i \sin 450°)$

   Trigonometrikus alakban azonban az argumentum a $[0°, 360°)$ intervallumba kell, hogy essen, ezért ezen még alakítanunk kell. Ha az argumentumhoz hozzáadjuk, vagy kivonjuk 360° valamilyen egész számú többszörösét, akkor a komplex szám nem változik. Most például az argumentumból 360°-ot ki kell vonnunk, így kapunk majd egy $[0°, 360°)$ intervallumba eső szöget.

$z_1 \cdot z_2 = 4(\cos(450° - 360°) + i(\sin 450° - 360°)) = 4(\cos 90° + i \sin 90°)$

5. **Feladat:** Határozzuk meg $(1+i)^7$ trigonometrikus alakját!

   Megoldás: Egy komplex számot kell hatványoznunk elég nagy kitevőre. Ha ezt algebrai alakban szeretnénk elvégezni, akkor nagyon sok szorzást kellene végrehajtani. Sokkal célszerűbb a komplex számot átírni trigonometrikus alakra, és ott elvégezni a hatványozást. Így ráadásul rögtön trigonometrikus alakban fogjuk megkapni az eredményt.

   Írjuk tehát át $1+i$-t trigonometrikus alakra.

   $r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

   $\operatorname{tg} \delta = \left|\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{1}{1}\right| = 1$

   Visszakeresve kapjuk: $\delta = 45°$.

   Ha ábrázoljuk a komplex számot, akkor az láthatóan az első síknegyedben helyezkedik el, s itt $\varphi = \delta$. Jelen esetben tehát $\varphi = 45°$.

   Ebből következően: $1 + i = \sqrt{2}(\cos 45° + i \sin 45°)$.

   Most következik a hatványozás. Trigonomtrikus alakú komplex szám hatványozása esetén a hatvány abszolút értéke egyenlő lesz az abszolút érték megfelelő hatványával, s a hatvány argumentumát pedig az eredeti argumentum és a kitevő szorzataként kapjuk. Képletben ez a következő módon írható. Ha $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, akkor

   $z^n = r^n(\cos(n\cdot\varphi) + i\sin(n\cdot\varphi))$.

   A konkrét esetben ez a következőt jelenti.

   $(1+i)^7 = (\sqrt{2})^7(\cos(7\cdot 45°) + i\sin(7\cdot 45°)) = 8\sqrt{2}(\cos 315° + i\sin 315°)$

6. **Feladat:** Adjuk meg $\sqrt[3]{\dfrac{81(\cos 310° + i\sin 310°)}{3(\cos 190° + i\sin 190°)}}$ értékeit trigonometrikus alakban!

   Megoldás: Elsőként a gyökjel alatti osztást kell elvégeznünk. Trigonometrikus alakú komplex számok osztása esetén a hányados abszolút értéke, az abszolút értékek hányadosával egyenlő, s a hányados argumentuma pedig az argumentumok különbségével. Képletben ezt a következő módon írhatjuk.

   Legyen $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$,

   ekkor $\dfrac{z_1}{z_2} = \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

   Jelen esetben ez a következőt jelenti:

   $\dfrac{81(\cos 310° + i\sin 310°)}{3(\cos 190° + i\sin 190°)} = \left(\dfrac{81}{3}\right)(\cos(310° - 190°) + i\sin(310° - 190°)) =$

   $= 27(\cos 120° + i\sin 120°)$

Ezután hajtsuk végre a gyökvonást. Komplex számból n-edik gyököt vonva az eredmény abszolút értéke az eredeti abszolút érték n-edik gyöke lesz, az eredmény argumentuma pedig az eredeti argumentum osztva a gyökkitevővel. Azonban a gyökvonásnak mindig annyi eredménye van, ahányadik gyököt vonunk, ezért ezen argumentumhoz hozáadható $\frac{k \cdot 360^\circ}{n}$, ahol k a $0, 1, 2 \cdots n-1$ értékeket veheti fel. Képletben ez a következő módon írható. Legyen $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ekkor

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + k \cdot 360^\circ}{n} + i\sin\frac{\varphi + k \cdot 360^\circ}{n}\right),$$

ahol $k = 0, 1, 2 \cdots n-1$.

Jelen feladatban ez a következőt jelenti.

$$\sqrt[3]{27(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)} =$$

$$= \sqrt[3]{27}\left(\cos\frac{120^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} + i\sin\frac{120^\circ + k \cdot 360^\circ}{3}\right), \text{ ahol } k = 0, 1, 2.$$

Elvégezve a műveleteket a következőt kapjuk:

$$\sqrt[3]{27(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)} = 3\left(\cos(40^\circ + k \cdot 120^\circ) + i\sin(40^\circ + k \cdot 120^\circ)\right),$$

ahol $k = 0, 1, 2$.

Célszerű külön is felírni a három gyököt.

$k = 0$ esetén $3\left(\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ\right)$

$k = 1$ esetén $3\left(\cos 160^\circ + i\sin 160^\circ\right)$

$k = 2$ esetén $3\left(\cos 280^\circ + i\sin 280^\circ\right)$

2.2. Összetett feladatok

1. **Feladat:** Tekintsük a következő komplex számokat: $z_1 = 4(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$, $z_2 = 4(\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ)$, $z_3 = 2(\cos 110^\circ + i\sin 110^\circ)$ Határozzuk meg $\frac{z_1 + z_2}{z_3}$ trigonometrikus alakját!

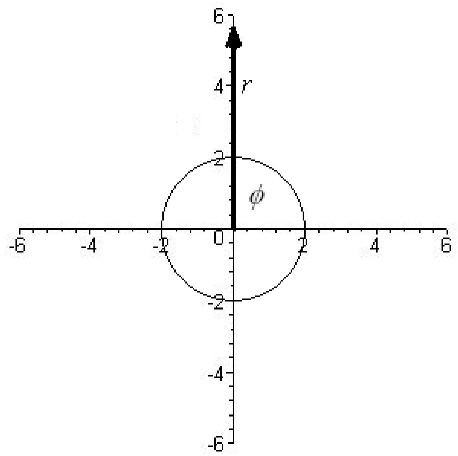
   Megoldás: A meghatározandó tört számlálójában két komplex szám összege áll. Ezek a számok trigonometrikus alakban vannak megadva, azonban az összeadást csak algebrai alakban tudjuk elvégezni. Ezért először meg kell határoznunk z_1 és z_2 algebrai alakját.

   $$z_1 = 4(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ) = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$$

   $$z_2 = 4(\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ) = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$$

   Ezután már elvégezhető az összeadás.

   $$z_1 + z_2 = (2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i) + (-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i) = 4\sqrt{2}i$$



5. ábra. $z_1 + z_2$

Hátra van még egy osztás. A számláló algebrai alakban van, a nevező pedig trigonometrikus alakban. Közös alakra kell őket hozni. Mivel az eredményt trigonometrikus alakban kérik, ezért célszerű a számlálót átírni trigonometrikus alakra. A számláló tiszta képzetes szám, így elegendő ábrázolni, és az ábráról leolvasni az adatokat.

Nyilvánvaló, hogy $r = 4\sqrt{2}$ és $\varphi = 90°$.

Ebből a számláló trigonometrikus alakja:

$z_1 + z_2 = 4\sqrt{2}(\cos 90° + i \sin 90°)$.

Most végezzük el az osztást.

$$\frac{z_1 + z_2}{z_3} = \frac{4\sqrt{2}(\cos 90° + i \sin 90°)}{2(\cos 110° + i \sin 110°)} =$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{2}(\cos(90° - 110°) + i \sin(90° - 110°)) = 2\sqrt{2}(\cos(-20°) + i \sin(-20°))$$

Mivel negatív szöget kaptunk, azért az argumentumhoz adjunk hozzá 360°-ot.

$$\frac{z_1 + z_2}{z_3} = 2\sqrt{2}(\cos 340° + i \sin 340°)$$

2. **Feladat:** Oldjuk meg a $z^6 + z^3 - 20 = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán!

   Megoldás: Ha bevezetjük az $u = z^3$ új ismeretlent, akkor a hatodfokú egyenletet visszavezethetjük másodfokú egyenletre.

   Kapjuk: $u^2 + u - 20 = 0$.

   Határozzuk meg ennek megoldásait a megoldóképlettel.

$$u_{1,2} = \frac{-1+\sqrt{1^2-4\cdot(-20)}}{2} = \frac{-1+\sqrt{81}}{2} = \begin{cases} \dfrac{-1+9}{2} = 4 \\ \dfrac{-1-9}{2} = -5 \end{cases}$$

Ahhoz, hogy az eredeti ismeretlent kapjuk meg, ezen u értékekből még köbgyököt kell vonnunk, hiszen ha $u = z^3$, akkor $z = \sqrt[3]{u}$.

A gyökvonást azonban trigonometrikus alakban tudjuk végrehajtani, ezért a másodfokú egyenlet gyökeit írjuk át trigonometrikus alakra. Mindkét gyök valós, így elég ábrázolni őket, s az ábráról leolvasni az abszolút értéküket és az argumentumukat.

$u_1 = 4$ esetén $r = 4$ és $\varphi = 0°$, így trigonometrikus alakja

$u_1 = 4(\cos 0° + i \sin 0°)$.

$u_2 = -5$ esetén $r = 5$ és $\varphi = 180°$, így trigonometrikus alakja

$u_2 = 5(\cos 180° + i \sin 180°)$.

A gyökvonások végrehajtása után 6 megoldást fogunk kapni.

Egyrészt

$$z_{1,2,3} = \sqrt[3]{u_1} = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{0° + k\cdot 360°}{3} + i \sin\frac{0° + k\cdot 360°}{3}\right),$$

ahol $k = 0, 1, 2$ értékeket vehet fel.

Másrészt

$$z_{4,5,6} = \sqrt[3]{u_2} = \sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{180° + k\cdot 360°}{3} + i \sin\frac{180° + k\cdot 360°}{3}\right),$$

ahol $k = 0, 1, 2$ értékeket vehet fel.

Felírhatjuk külön-külön is a gyököket.

$z_1 = \sqrt[3]{4}\,(\cos 0° + i \sin 0°)$

$z_2 = \sqrt[3]{4}\,(\cos 120° + i \sin 120°)$

$z_3 = \sqrt[3]{4}\,(\cos 240° + i \sin 240°)$

$z_4 = \sqrt[3]{5}\,(\cos 60° + i \sin 60°)$

$z_5 = \sqrt[3]{5}\,(\cos 180° + i \sin 180°)$

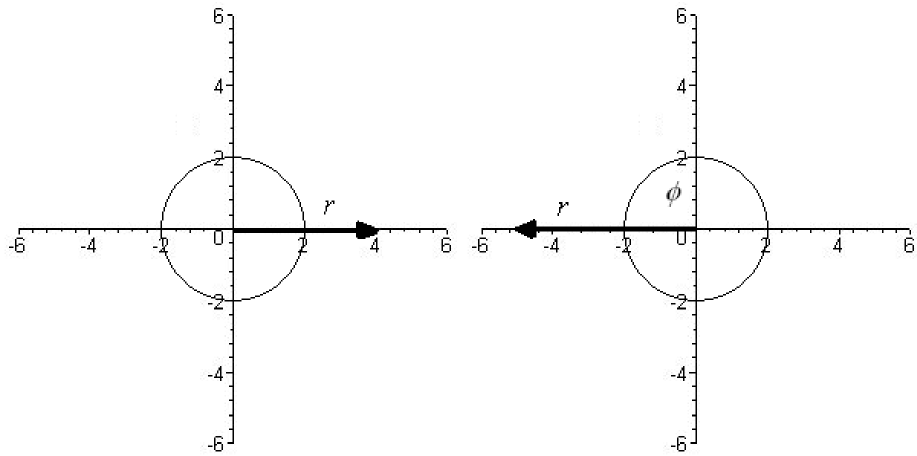
$z_6 = \sqrt[3]{5}\,(\cos 300° + i \sin 300°)$

3. **Feladat:** Oldjuk meg a $z^4 + iz^2 + 12 = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán!

   Megoldás: Vezessük be az $t = z^2$ új ismeretlent, ezzel a negyedfokú egyenletet visszavezethetjük másodfokú egyenletre.

   Kapjuk: $t^2 + it + 12 = 0$.

   Határozzuk meg ennek megoldásait a megoldóképlettel.



6. ábra. u_1 és u_2

$$t_{1,2} = \frac{-i + \sqrt{i^2 - 4 \cdot 12}}{2} = \frac{-i + \sqrt{(-49)}}{2} = \begin{cases} \dfrac{-i + 7i}{2} = 3i \\ \dfrac{-i - 7i}{2} = -4i \end{cases}$$

Az eredeti ismeretlen meghatározásához ezen t értékekből még négyzetgyököt kell vonnunk, hiszen ha $t = z^2$, akkor $z = \sqrt{t}$.

A gyökvonást trigonometrikus alakban tudjuk végrehajtani, ezért a másodfokú egyenlet gyökeit írjuk át trigonometrikus alakra. Mindkét gyök tiszta képzetes, így elég ábrázolni őket, s az ábráról leolvasni az abszolút értéküket és az argumentumukat.

$t_1 = 3i$ esetén $r = 3$ és $\varphi = 90°$, így trigonometrikus alakja

$t_1 = 3(\cos 90° + i \sin 90°)$.

$t_2 = -4i$ esetén $r = 4$ és $\varphi = 270°$, így trigonometrikus alakja

$t_2 = 4(\cos 270° + i \sin 270°)$.

A gyökvonások végrehajtása után 4 megoldást fogunk kapni.

Egyrészt

$$z_{1,2} = \sqrt{t_1} = \sqrt{3}\left(\cos \frac{90° + k \cdot 360°}{2} + i \sin \frac{90° + k \cdot 360°}{2}\right),$$

ahol $k = 0, 1$ értékeket vehet fel.

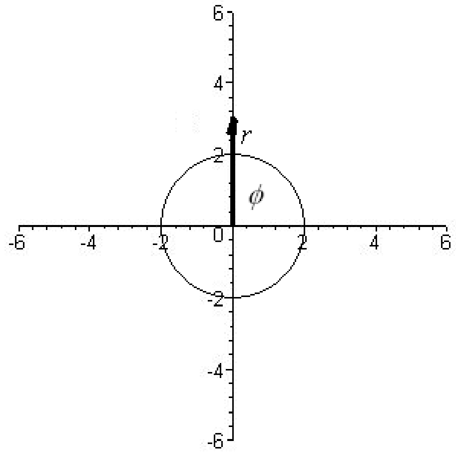
Másrészt

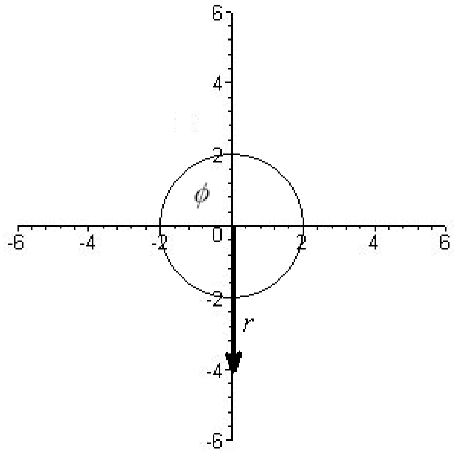
$$z_{3,4} = \sqrt{t_2} = \sqrt{4}\left(\cos \frac{270° + k \cdot 360°}{2} + i \sin \frac{270° + k \cdot 360°}{2}\right),$$

ahol $k = 0, 1$ értékeket vehet fel.

Írjuk fel külön-külön is gyököket.

$z_1 = \sqrt{3}\,(\cos 45° + i \sin 45°)$





7. ábra. t_1 és t_2

$z_2 = \sqrt{3}\,(\cos 225° + i \sin 225°)$

$z_3 = 2\,(\cos 135° + i \sin 135°)$

$z_1 = 2\,(\cos 315° + i \sin 315°)$

4. **Feladat:** Oldjuk meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán!

$(1 - 2\sqrt{3}i)z^3 - 8 = 24\,(\cos 60° + i \sin 60°)$

Megoldás: Az egyenletben csak egyetlen helyen fordul elő az ismeretlen, így egyszerűen csak rendezéssel ki kell fejeznünk. Első lépésként mindkét oldalhoz hozzá kellene adnunk 8-at. Mivel a jobb oldalon egy trigonometrikus alakú komplex szám áll így ezt csak akkor tudjuk majd elvégezni, ha a jobb oldalt átírjuk algebrai alakra.

$24\,(\cos 60° + i \sin 60°) = 24\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 12 + 12\sqrt{3}i$

Így az egyenlet a következő alakot ölti.

$(1 - 2\sqrt{3}i)z^3 - 8 = (12 + 12\sqrt{3}i)$

Ezután már elvégezhető az összeadás.

$(1 - 2\sqrt{3}i)z^3 = (12 + 12\sqrt{3}i) + 8 = 20 + 12\sqrt{3}i$

Következő lépésként osztani kell $1 - 2\sqrt{3}i$-vel az egyenlet mindkét oldalát. Ezt a műveletet rögtön végre is tudjuk hajtani, hiszen a jobb oldal is, és az osztó is algebrai alakban van.

$$z^3 = \frac{20 + 12\sqrt{3}i}{1 - 2\sqrt{3}i} = \frac{(20 + 12\sqrt{3}i)(1 + 2\sqrt{3}i)}{(1 - 2\sqrt{3}i)(1 + 2\sqrt{3}i)} =$$

$$= \frac{20 + 40\sqrt{3}i + 12\sqrt{3}i + 72i^2}{1^2 + (2\sqrt{3})^2} = \frac{20 + 40\sqrt{3}i + 12\sqrt{3}i - 72}{13} =$$

$= \dfrac{-52 + 52\sqrt{3}i}{13} = -4 + 4\sqrt{3}i$

Az ismeretlen meghatározásához még köbgyököt kell vonnunk. Mivel a jobb oldal algebrai alakban van, ezért először ott át kell térnünk trigonometrikus alakra.

$r = \sqrt{(-4)^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{64} = 8$

$\operatorname{tg} \delta = \left| \dfrac{4\sqrt{3}}{-4} \right| = \sqrt{3}$

Ebből visszakeresve $\delta = 60^\circ$.

Nem készítünk már ábrát a komplex számról, mert egyszerűen a valós és képzetes rész előjeléből látható, hogy ez a szám a második síknegyedbe esik. Itt a $\varphi = 180^\circ - \delta$ összefüggés teljesül. Jelen esetben $\varphi = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Ezek alapján a jobb oldal trigonometrikus alakja a következő:

$-4 + 4\sqrt{3}i = 8(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$.

Ezután már tudunk harmadik gyököt vonni, s ezzel megkapjuk az egyenlet megoldásait.

$z = \sqrt[3]{8(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)} =$

$\sqrt[3]{8} \left(\cos \dfrac{120^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} + i \sin \dfrac{120^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} \right)$, ahol $k = 0, 1, 2$.

Írjuk fel külön a három megoldást.

$z_1 = 2(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ)$

$z_2 = 2(\cos 160^\circ + i \sin 160^\circ)$

$z_3 = 2(\cos 280^\circ + i \sin 280^\circ)$

5. **Feladat:** Oldjuk meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán!

$\dfrac{z^5}{\sqrt{2}i} + 24 - 8i = (1 - i)^7$

Megoldás: Az egyenletben csak egyetlen helyen fordul elő az ismeretlen, így egyszerűen csak rendezéssel ki kell fejeznünk. Első lépésként a jobb oldalon el kell végeznünk a hatványozást. A kitevő nagy, így algebrai alakban ez sok szorzást jelentene. Célszerűbb az $(1 - i)$-t átírni trigonometrikus alakra.

$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\operatorname{tg} \delta = \left| \dfrac{-1}{1} \right| = 1$

Ebből visszakeresve $\delta = 45^\circ$.

A valós és képzetes rész előjeléből látható, hogy ez a szám a negyedik síknegyedbe esik. Itt a $\varphi = 360° - \delta$ összefüggés teljesül. Jelen esetben $\varphi = 360° - 45° = 315°$.

Ezek alapján $1 - i$ trigonometrikus alakja a következő:

$1 - i = \sqrt{2}(\cos 315° + i \sin 315°)$.

Végezzük el ezután a hatványozást.

$(1 - i)^7 = (\sqrt{2})^7(\cos(7 \cdot 315°) + i \sin(7 \cdot 315°)) =$

$= 8\sqrt{2}(\cos 2205° + i \sin 2205°)$

Módosítanunk kell az argumentumon, mert nem esik a $[0°, 360°)$ intervallumba. Jelen eseteben $6 \cdot 360° = 2160°$-ot kell kivonnunk, s így $2205° - 2160° = 45°$-ot kapunk. Eszerint a hatvány trigonometrikus alakja az alábbi.

$(1 - i)^7 = 8\sqrt{2}(\cos 45° + i \sin 45°)$

A következő lépésben mindkét oldalból ki kell vonnunk $(24 - 8i)$-t. Ez azonban csak algebrai alakban végezhető el, ezért a jobb oldalt át kell írnunk algebrai alakra.

$$8\sqrt{2}(\cos 45° + i \sin 45°) = 8\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 8 + 8i$$

Az egyenlet így a következő alakot ölti.

$$\frac{z^5}{\sqrt{2}i} + 24 - 8i = 8 + 8i$$

Immáron elvégezhető a kivonás.

$$\frac{z^5}{\sqrt{2}i} = -16 + 16i$$

Ezután szorozzuk mindkét oldalt $\sqrt{2}i$-vel.

$z^5 = (-16 + 16i)\sqrt{2}i = -16\sqrt{2}i + 16\sqrt{2}i^2 = -16\sqrt{2}i - 16\sqrt{2} =$

$z^5 = -16\sqrt{2} - 16\sqrt{2}i$

Utolsó lépésként mindkét oldalból ötödik gyököt kell vonnunk. Ehhez a jobb oldalon át kell térnünk trigonometrikus alakra.

$$r = \sqrt{(-16\sqrt{2})^2 + (-16\sqrt{2})^2} = \sqrt{1024} = 32$$

$$\operatorname{tg} \delta = \left|\frac{-16\sqrt{2}}{-16\sqrt{2}}\right| = 1$$

Ebből visszakeresve $\delta = 45°$.

A valós és képzetes rész előjeléből látható, hogy ez a szám a harmadik síknegyedbe esik. Itt a $\varphi = 180° + \delta$ összefüggés teljesül. Jelen esetben $\varphi = 180° + 45° = 225°$.

Ezek alapján $-16\sqrt{2} - 16\sqrt{2}i$ trigonometrikus alakja a következő:
$-16\sqrt{2} - 16\sqrt{2}i = 32(\cos 225° + i \sin 225°)$.

Végezzük el a gyökvonást.

$z = \sqrt[5]{32(\cos 225° + i \sin 225°)} =$

$= \sqrt[5]{32}\left(\cos \dfrac{225° + k \cdot 360°}{5} + i \sin \dfrac{225° + k \cdot 360°}{5}\right)$, ahol $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Írjuk fel külön az öt megoldást. A megoldások argumentuma most $\dfrac{360°}{5} = 72°$-onként növekszik.

$z_1 = 2(\cos 45° + i \sin 45°)$

$z_2 = 2(\cos 117° + i \sin 117°)$

$z_3 = 2(\cos 189° + i \sin 189°)$

$z_4 = 2(\cos 261° + i \sin 261°)$

$z_5 = 2(\cos 333° + i \sin 333°)$

3. Függvénytani alapfogalmak

3.1. Alapfeladatok

1. **Feladat:** Határozzuk meg a valós számok legbővebb részhalmazát, melyen az $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x+3}}{3x-2}$ hozzárendelési utasítású függvény értelmezhető!

   Megoldás: Ha egy függvény esetében csak a hozzárendelési utasítást adják meg, akkor mindig felvetődik az a kérdés, mi a legbővebb halmaz, melyen értelmezhető a függvény. Azt is mondhatjuk ilyenkor, hogy meg kell tennünk a szükséges kikötéseket. Jelen esetben két okból kell kikötést tennünk. Egyrészt a négyzetgyök miatt, hiszen csak nem negatív számoknak létezik négyzetgyöke a valós számok halmazán, másrészt az osztás miatt, hiszen 0-val nem lehet osztani. Írjuk fel ezeket a kikötéseket képlettel, majd rendezzük őket a változóra. Végül határozzuk meg azt a halmazt, melynek elemei mindegyik kikötésnek eleget tesznek.

   A négyzetgyök miatti kikötés: $4x + 3 \geq 0$

   Rendezzük ezt x-re.

   $4x \geq -3$

   $x \geq -\dfrac{3}{4}$

   A nevező miatti kikötés: $3x - 2 \neq 0$

   Ezt is rendezzük x-re.

   $3x \neq 2$

   $x \neq \dfrac{2}{3}$

   A függvény tehát a változó azon értékeire értelmezhető, melyekre $x \geq -\dfrac{3}{4}$ és $x \neq \dfrac{2}{3}$.

   Célszerűbb mindezt más jelöléssel írni. Jelölje a függvény értelmezési tartományát D_f, és használjuk az intervallumokra vonatkozó jelöléseket. Ekkor az értelmezési tartomány az alábbi módon írható:

   $D_f = \left[-\dfrac{3}{4}, \infty\right) \setminus \left\{\dfrac{2}{3}\right\}.$

2. **Feladat:** Határozzuk meg a valós számok legbővebb részhalmazát, melyen az $f(x) = \dfrac{\ln(9-4x)}{5x+8}$ hozzárendelési utasítású függvény értelmezhető!

   Megoldás: Járjunk el ugyanúgy, mint az előző feladatban. Most is két kikötést kell tennünk, mert logaritmusa csak pozitív számoknak létezik, és nevezőben nem állhat 0.

A logaritmus miatti kikötés: $9 - 4x > 0$.

Ebből $9 > 4x$, majd $\frac{9}{4} > x$ következik.

A nevező miatti kikötés: $5x + 8 \neq 0$.

Ebből $5x \neq -8$, majd $x \neq -\frac{8}{5}$ következik.

Ezek alapján a függvény értelmezési tartománya a következő:

$D_f = \left(-\infty, \frac{9}{4}, \right) \setminus \left\{-\frac{8}{5}\right\}$.

3. **Feladat:** Határozzuk meg a valós számok legbővebb részhalmazát, melyen az $f(x) = \frac{1}{\ln(5x-8)}$ hozzárendelési utasítású függvény értelmezhető!

   Megoldás: A logaritmus és a nevező miatt kell most is kikötést tennünk.

   A logaritmus miatti kikötés: $5x - 8 > 0$.

   Ebből $5x > 8$, majd $x > \frac{8}{5}$ következik.

   A nevező miatti kikötés: $\ln(5x - 8) \neq 0$.

   Most a rendezés egy kicsit érdekesebb, mint a korábbiakban. Célszerű lenne a jobb oldalon álló 0-t is egy megfelelő szám természetes alapú logarimusaként írni, mert akkor a logaritmus függvény szigorú monotonitása miatt elhagyhatjuk mindkét oldalról a logaritmust. Tudjuk, hogy $\ln 1 = 0$, így ezt írjuk a jobb oldalra.

   $\ln(5x - 8) \neq \ln 1$

   Ebből $5x - 8 \neq 1$ következik, amit már könnyen tudunk rendezni.

   $5x \neq 9$, majd $x \neq \frac{9}{5}$.

   Ezek alapján a függvény értelmezési tartománya a következő:

   $D_f = \left(\frac{8}{5}, \infty\right) \setminus \left\{\frac{9}{5}\right\}$.

4. **Feladat:** Határozzuk meg a valós számok legbővebb részhalmazát, melyen az $f(x) = \arcsin\frac{3x+7}{8}$ hozzárendelési utasítású függvény értelmezhető!

   Megoldás: Most csak egyetlen kikötést kell tennünk az arcsin miatt. Tudjuk, hogy ez a függvény a $[-1, 1]$ intervallumon értelmezhető. Jelen esetben azon kifejezés értékének kell ebbe az itervallumba esni, aminek az arcsin-át vesszük.

   A kikötés tehát: $-1 \leq \frac{3x+7}{8} \leq 1$

Ez egy kettős egyenlőtlenség. Felbonthatjuk két egyenlőtlenségre is, de elvégezhetjük egyben is a rendezési lépéseket. Elsőként szorozzunk 8-cal.

$-8 \leq 3x + 7 \leq 8$

Vonjunk ki 7-et.

$-15 \leq 3x \leq 1$

Végül osszunk 3-mal.

$-5 \leq x \leq \frac{1}{3}$

A függvény értelmezési tartománya a következő:

$D_f = \left[-5, \frac{1}{3}\right]$.

5. **Feladat:** Határozzuk meg az $f(x) = 2(x^2+3)$ hozzárendelési utasítású függvény értékkészletét, ha az értelmezési tartomány a valós számok legbővebb olyan részhalmaza, melyen a függvény értelmezhető!

   Megoldás: A függvény nyilvánvalóan értelmezhető minden valós számra, tehát $D_f = \mathbb{R}$.

   A $g(x) = x^2$ függvény értékkészlete ismert, hiszen elemi alapfüggvény. Tudjuk, hogy $R_g = [0, \infty)$, azaz $x^2 \geq 0$ teljesül minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, és az x^2 függvény fel is veszi az összes nem negatív értéket.

   Ezt felhasználva határozzuk meg f értékkészletét. Alakítsuk át f hozzárendelési utasítását úgy, hogy felbontjuk a zárójelet.

   $f(x) = 2x^2 + 6$

   Látható, hogy f a g-ből lineáris transzformációkkal származtatható, két lépésben.

   Elsőként az x^2 helyett $2x^2$-re térünk át. Ez azt jelenti, hogy minden függvényérték kétszeresére változik. Ez azonban nem változtatja az értékkészletet, hiszen $x^2 \geq 0$ akkor és csak akkor, ha $2x^2 \geq 0$.

   Második lépésben a $2x^2$-ről $2x^2 + 6$-ra térünk át. Ez azt jelenti a függvény értékei megnőnek 6-tal, s ez már változtat az értékkészleten. A $2x^2 \geq 0$ egyenlőtlenség ugyanis akkor és csak akkor teljesül, ha

   $2x^2 + 6 \geq 6$.

   Ebből következően az f függvény értékkészlete a következő:

   $R_f = [6, \infty)$.

6. **Feladat:** Határozzuk meg az $f(x) = 4e^x - 3$ hozzárendelési utasítású függvény értékkészletét, ha az értelmezési tartomány a valós számok legbővebb olyan részhalmaza, melyen a függvény értelmezhető!

Megoldás: A függvény nyilvánvalóan értelmezhető minden való számra, tehát $D_f = \mathbb{R}$.

Hasonlóan, mint az előző feladatban, most is egy elemi alapfüggvényből lineáris transzformációkkal kapjuk az f függvényt. Tekintsük ugyanis a $g(x) = e^x$ függvényt, azaz a jól ismert exponenciális függvényt. Ebből származtatható transzformációkkal az f függvény, ugyanúgy két lépésben, mint az előző feladatban. A g függvény értékkészletét ismerjük, hiszen $e^x > 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, s a függvény fel is vesz minden pozitív értéket, tehát $R_g = (0, \infty)$.

Az $e^x > 0$ egyenlőtlenség viszont ekvivalens a $4e^x > 0$ egyenlőtlenséggel, majd újabb ekvivalens átalakítással a $4e^x - 3 > -3$ egyenlőtlenséget kapjuk. Ez pedig azt jelenti, hogy az f függvény értékkészlete az alábbi:

$R_f = (-3, \infty)$.

7. **Feladat:** Adjuk meg az $f \circ g$ és $g \circ f$ összetett függvények hozzárendelési utasítását, ha $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$ és $g(x) = 1 - \sqrt{x}$!

Megoldás: Összetett függvénynek az olyan hozzárendeléseket nevezzük, amelyeket függvények egymás utánjaként állítunk elő. Például az $f \circ g$ függvény azt jelenti, hogy először a g hozzárendelést hajtjuk végre, majd a kapott értékből indulva végrehajtjuk az f hozzárendelést. Ezt az egymás utániságot fejezi ki az összetett függvények másik jelölési módja, amikor az $f \circ g$ összetett függvényt $f(g(x))$-szel jelölik. Ez a jelölésmód magyarázatot ad az elnevezésekre is, miszerint az első hozzárendelést belső függvénynek nevezzük, a másodikat pedig külső függvénynek. Ebből a jelölésmódból pedig az is egyértelmű, hogy az összetett függvény hozzárendelési utasítását úgy kapjuk, hogy a külső függvény hozzárendelési utasításában a változó szerepét a belső függvény veszi át. Képletben ez annyit jelent, hogy a külső függvényben x helyére a belső függyvényt kell helyettesítenünk.

Ennyi magyarázat után lássuk a két összetett függvény hozzárendelési utasítását. Az $f \circ g$ előállításakor f-ben helyettesítünk x helyére $g(x)$-et, míg a $g \circ f$ esetén pedig g-ben helyettesítünk x helyére $f(x)$-et. Az eredmények a következők:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{(1-\sqrt{x})-1}{(1-\sqrt{x})} = \frac{-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$$

Ha bővítünk -1-gyel, akkor ez a következő módon is írható:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}.$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 1 - \sqrt{\frac{x-1}{x}}$$

Ezt is írhatjuk más formában, ha a gyökjel alatt a törtet két részre bontjuk. Így a következő alakot kapjuk:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x}}.$$

8. **Feladat:** Adjuk meg az $f \circ g$ és $g \circ f$ összetett függvények hozzárendelési utasítását, ha $f(x) = \sqrt{x+1}$ és $g(x) = 5^{x+3}$!

   Megoldás: Amint az előző feladat megoldásában már szerepelt, az $f \circ g$ előállításakor f-ben x helyére $g(x)$-et helyettesítünk, míg a $g \circ f$ esetén pedig g-ben helyettesítünk $f(x)$-et x helyére. Így az alábbiakat kapjuk:

   $$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{5^{x+3} + 1},$$

   $$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 5^{\sqrt{x+1}+3}.$$

9. **Feladat:** Adjuk meg az $f \circ f$ összetett függvény hozzárendelési utasítását, ha $f(x) = x^2 + 1$!

   Megoldás: Olyan összetett függvényt kell előállítanunk, amelynek a külső és belső függvénye is az f függvény. Ez azt jelenti, az f függvényben az x helyére $f(x)$-et kell helyettesítenünk.

   Így a következőt kapjuk:

   $$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = (x^2+1)^2+1 = (x^4+2x^2+1)+1 = x^4+2x^2+2$$

10. **Feladat:** Adjunk meg külső és belső függvényt az $f(x) = 2^{\cos x}$ összetett függvény esetén!

    Megoldás: Amint a kettővel előbbi feladat magyarázatában szerepelt, a belső függvény az első hozzárendelés, a külső függvény pedig a második hozzárendelés, a függvények egymás utánjában. Amikor tehát egy összetett függvényhez keresünk külső és belső függvényt, akkor azt kell átgondolnunk, milyen hozzárendelést hajtunk végre először x-en. Most nyilvánvalóan x-nek cos-át vesszük, tehát ez lehet belső függvény. Mivel a külső függvényben a változó szerepét a belső függvény veszi át, így ezen belső függvényhez tartozó külső függvényt úgy kapjuk meg, hogy a belső függvény helyére egyszerűen a változót, általában x-et írjuk. Jelen esetben így a következőket kapjuk.

    Belső függvény: $g(x) = \cos x$

    Külső függvény: $h(x) = 2^x$

    Ezen két függvényből az f nyilván a $h \circ g$ kompozícióval kapható meg.

11. **Feladat:** Adjunk meg külső és belső függvényt az $f(x) = \mathrm{tg}^2 x$ összetett függvény esetén!

    Megoldás: Feladatunk ugyanaz, mint az előbb. Gondoljuk végig, mi az első hozzárendelés. Ehhez célszerű az f hozzárendelési utasítását egy kicsit átalakítani, ugyanis a jelölés félrevezető lehet. Amikor egy függvénynél szerepel hatványozás, az ugyanazt jelenti, mintha a függvényt zárójelbe tennénk, s a zárójelen kívülre írnánk hatványozást. Jelen esetben például a következőt:

$f(x) = \operatorname{tg}^2 x = (\operatorname{tg} x)^2$

A rövidebb írásmód is hasznos, mert nem kell olyan sok zárójelet használnunk, de nem szabad elfeledkezni a jelentéséről. A hosszabb jelölésmód mutatja ugyanis egyértelműbben, hogy itt először a tg-ét vesszük az x-nek, majd amit kaptunk, azt emeljük négyzetre. Ezzel találtunk is külső és belső függvényt.

Belső függvény: $g(x) = \operatorname{tg} x$

Külső függvény: $h(x) = x^2$

Ebből a két függvényből az f nyilván a $h \circ g$ kompozícióval kapható meg.

12. **Feladat:** Határozzuk meg az $f(x) = (4x + 1)^3$ képletű függvény inverzének hozzárendelési utasítását!

    Megoldás: Az f függvény kölcsönösen egyértelmű, mert $f(a) = f(b)$ csak akkor teljesül, ha $a = b$, tehát létezik inverze. Az inverz függvény tulajdonképpen az eredeti hozzárendelés megfordítottját jelenti. Ha az eredeti függvényben az értéket röviden y-nal jelöljük, akkor az f függvényt az $y = (4x + 1)^3$ egyenlettel adhatjuk meg. Az inverz függvényben felcserélődik a független változó, azaz x, és a függő változó, azaz y szerepe. Ami eddig az értelmezési tartomány volt az lesz az inverzben az értékkészlet, s ami az eredeti függvény értékkészlete volt, az lesz az inverz értelmezési tartománya. A hozzárendelési utasítás meghatározásakor ez azt jelenti, hogy fel kell cserélnünk az egyenletben x és y szerepét.

    Az inverz függvényt tehát az $x = (4y + 1)^3$ egyenlet adja meg.

    Ez azonban így nem egy explicit alakban adott függvény, azaz nincs a függvényértékre, tehát y-ra rendezve. Ha lehetséges, akkor célszerűbb inkább explicit alakban megadni a függvényeket, mert úgy sokkal egyszerűbben kezelhetők. Próbáljuk meg tehát y-ra rendezni az egyenletet.

    Első lépésként vonjunk mindkét oldalból köbgyököt.

    $\sqrt[3]{x} = 4y + 1$

    Ezután vonjunk ki mindkét oldalból 1-et, majd osszunk 4-gyel.

    $\frac{\sqrt[3]{x} - 1}{4} = y$

    Ezzel meg is kaptuk explicit alakban az inverz függvény hozzárendelési utasítását, melyet az alábbi módon írhatunk:

$f^{-1}(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{4}$.

Megjegyzés: Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az $f^{-1}(x)$ jelölésben nem hatványozásról van szó! Ezzel nem az f függvény -1-dik hatványát jelöljük, hanem az inverzét.

13. **Feladat:** Határozzuk meg az $f(x) = e^{2x+5}$ képletű függvény inverzének hozzárendelési utasítását!

    Megoldás: Az f függvény kölcsönösen egyértelmű, tehát létezik inverze.

    Járjunk el az előző feladatban leírtak szerint, azaz írjunk az $f(x)$ helyére y-t.

    $y = e^{2x+5}$

    Majd cseréljük fel x és y szerepét.

    $x = e^{2y+5}$

    Ezután rendezzük y-ra az egyenletet. Mivel y kitevőben szerepel, ezért vesszük mindkét oldal természetes alapú logaritmusát.

    $\ln x = \ln(e^{2y+5})$

    Mindezt azért tettük, mert középiskolából ismert, hogy $\log_a(a^b) = b$, s így $\ln(e^{2y+5}) = 2y + 5$. (Ne feledkezzünk el arról, hogy az ln ugyanazt jelenti, mintha $\log_e$-t írnánk.) Így az egyenlet a következő lesz.

    $\ln x = 2y + 5$

    A további rendezési lépések már egyszerűek, először kivonunk 5-öt, majd osztunk 2-vel.

    $\dfrac{\ln x - 5}{2} = y$

    Az inverz függvény hozzárendelési utasítása tehát a következő:

    $f^{-1}(x) = \dfrac{\ln x - 5}{2}$.

14. **Feladat:** Határozzuk meg az $f(x) = \ln(6x - 7)$ képletű függvény inverzének hozzárendelési utasítását!

    Megoldás: Az f függvény kölcsönösen egyértelmű, tehát létezik inverze.

    Írjunk az $f(x)$ helyére y-t.

    $y = \ln(6x - 7)$

    Cseréljük fel x és y szerepét.

    $x = \ln(6y - 7)$

    Rendezzük y-ra az egyenletet. Mivel y logaritmuson belül szerepel, ezért emeljük fel az e számot az egyenlet jobb illetve bal oldalára.

$e^x = e^{\ln(6y-7)}$

Ezt azért tesszük, mert a logaritmus definíciója szerint $a^{\log_a b} = b$, s így $e^{\ln(6y-7)} = 6y - 7$. Ezzel az egyenlet a következő alakot ölti.

$e^x = 6y - 7$

Már csak egyszerű rendezési lépések vannak hátra. Először mindkét oldalhoz adjunk 7-et, majd osszunk 6-tal.

$\frac{e^x + 7}{6} = y$

Az inverz függvény hozzárendelési utasítása tehát az alábbi:

$f^{-1}(x) = \frac{e^x + 7}{6}$.

3.2. Összetett feladatok

1. **Feladat:** Határozzuk meg a valós számok legbővebb részhalmazát, melyen az $f(x) = \frac{\ln(2x+9)}{2 - \sqrt{6 - |x|}}$ hozzárendelési utasítású függvény értelmezhető!

   Megoldás: Hasonló feladattal találkoztunk az alapfeladatok között is. Most annyiban változott a helyzet, hogy több kikötést kell tenni, s így az összes kikötésnek elget tevő halmaz meghatározása is nehezebb. Menjünk sorba a kikötéseken.

   Logaritmus miatti kikötés: $2x + 9 > 0$, amiből $x > -\frac{9}{2}$ következik.

   Négyzetgyök miatti kikötés: $6 - |x| \geq 0$, amiből $|x| \leq 6$ következik. Ezt azonban még tovább kell alakítanunk. Ez az egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $-6 \leq x \leq 6$.

   Nevező miatti kikötés: $2 - \sqrt{6 - |x|} \neq 0$, amiből $\sqrt{6 - |x|} \neq 2$.

   Mindkét oldal nemnegatív, így négyzetre emelhetünk.

   $6 - |x| \neq 4$.

   Ebből $|x| \neq 2$, azaz $x \neq \pm 2$.

   Miután megtettük a kikötéseket, meg kell keresnünk azt a halmazt, melynek elemei mindegyik kikötésnek eleget tesznek. Ehhez csoportosítsuk a kikötéseket.

   Lehetnek olyan kikötések, amelyek alulról korlátozzák x értékét. Most két ilyen kikötésünk van, egyrészt $-\frac{9}{2} < x$, másrészt $-6 \leq x$. Ki kell választanunk ezek közül az erősebbet, amelynek teljesülése maga után vonja a másik teljesülését is. Most a $-\frac{9}{2} < x$ az erősebb, hiszen ha ez teljesül akkor teljesül az $-6 \leq x$ kikötés is.

Lehet olyan kikötés, ami felülről korlátozza x értékét. Ilyen most csak egy van, $x \leq 6$. Ha több ilyen kikötésünk lenne, akkor természetesen itt is ki kellene választanunk a legerősebbet.

Valamint lehet kizáró kikötés. Ilyen most az $x \neq \pm 2$.

Ezek után már egyenlőtlenségekkel könnyű megadni a függvény értelmezési tartományát.

Annak kell teljesülni, hogy $-\frac{9}{2} < x \leq 6$ és $x \neq \pm 2$.

Ugyanez intervallumként felírva a következő:

$D_f = \left(-\frac{9}{2}, 6\right] \setminus \{\pm 2\}$.

2. **Feladat:** Határozzuk meg a valós számok legbővebb részhalmazát, melyen az $f(x) = \dfrac{\arccos\frac{2x+5}{7}}{1-\sqrt{2x+7}}$ hozzárendelési utasítású függvény értelmezhető!

   Megoldás: A feladat nagyon hasonlít az előzőre. Tegyük meg a szükséges kikötésket.

   Az arccos miatti kikötés: $-1 \leq \frac{2x+5}{7} \leq 1$.

   Ebből $-7 \leq 2x+5 \leq 7$ következik,

   majd $-12 \leq 2x \leq 2$,

   s végül a $-6 \leq x \leq 1$ egyenlőtlenséget kapjuk.

   A négyzetgyök miatti kikötés: $2x+7 \geq 0$, amiből $x \geq -\frac{7}{2}$ következik.

   Nevező miatti kikötés: $1-\sqrt{2x+7} \neq 0$, amiből $\sqrt{2x+7} \neq 1$ következik. Mindkét oldal nem negatív, így négyzetre emelés után $2x+7 \neq 1$ következik, amiből $x \neq -3$.

   Két olyan kikötésünk van, ami aluról korlátozza x értékét. Ezek a $-6 \leq x$ és $-\frac{7}{2} \leq x$ egyenlőtlenségek. Közülük a második az erősebb, tehát a $-\frac{7}{2} \leq x$ feltételnek kell teljesülni.

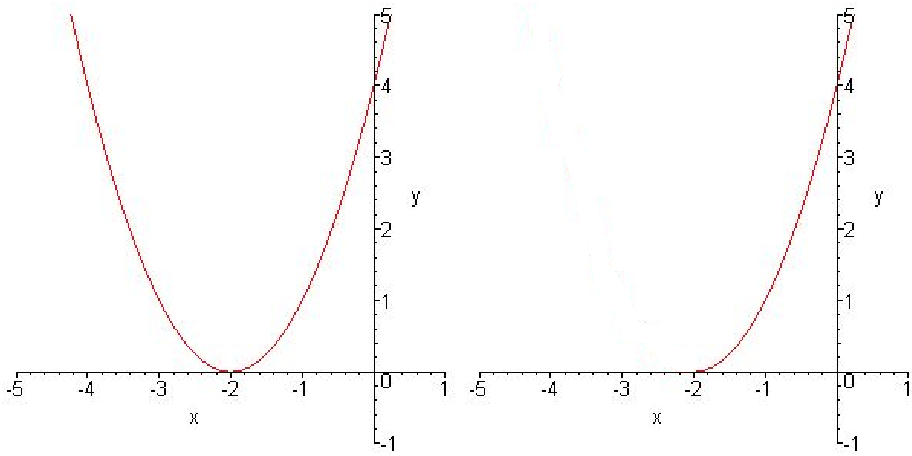
   Felülről csak az $x \leq 1$ feltétel korlátozza x-et.

   Valamint van egy kizáró feltételünk is, $x \neq -3$.

   Ezekből a függvény értelmezési tartománya a következő:

   $D_f = \left[-\frac{7}{2}, 1\right] \setminus \{-3\}$.

3. **Feladat:** Tekintsük az $f(x) = x^2 + 4x + 4$ függvényt. Szűkítsük le a függvényt minél tágabb halmazra úgy, hogy a leszűkítés kölcsönösen



8. ábra. $f(x) = x^2 + 4x + 4$ és annak leszűkítése

egyértelmű legyen. Határozzuk meg ezen leszűkített függvény inverzét. Adjuk meg az inverz értelmezési tartományát és értékkészletét is!

Megoldás: Ha a valós számok halmazán értelmezzük a függvényt, akkor nem kölcsönösen egyértelmű, hisz például $f(-3) = (-3)^2 + 4 \cdot (-3) + 4 = 1$ és $f(-1) = (-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 4 = 1$, azaz léteznek olyan különböző értékei x-nek, amelyekre ugyanazt az értéket veszi fel a függvény, s ezért leszűkítés nélkül nem invertálható.

A megfelelő leszűkítés megkereséséhez ábrázoljuk a függvényt, előtte azonban alakítsuk át a hozzárendelési utasítását. Könnyen felismerhető, hogy $f(x) = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$.

Ebből látható, hogy a függvény grafikonja egy olyan parabola, melyet az x^2 függvény grafikonjából x tengellyel párhuzamos, negatív irányú, 2 egységgel történő eltolással kapunk.

Az is látható az ábráról, hogy ha leszűkítjük a függvényt az $x \geq -2$ halmazra, akkor ezen leszűkítésen a függvény szigorúan monoton növő lesz, tehát kölcsönösen egyértelmű. (Lényegében csak a parabola felét vesszük.) Ennél kevésbé nem szűkíthetünk a függvényen, mert akkor már lennének a grafikonnak olyan pontjai, melyek azonos magasságban helyezkednének el, ami azt jelenti, a függvény nem kölcsönösen egyértelmű. Egy megfelelő leszűkítés tehát a következő:

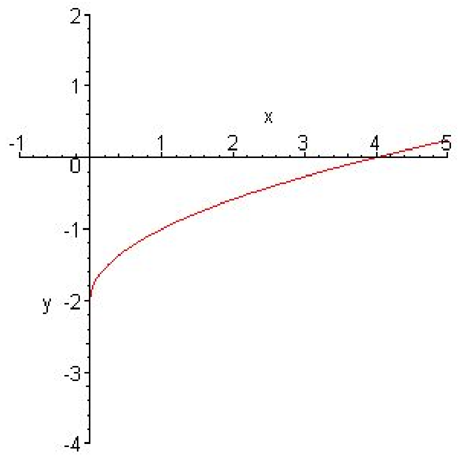
$g(x) = x^2 + 4x + 4$ és $D_g = [-2, \infty)$

Ezen g függvénynek határozzuk meg az inverzét.

Ehhez írjunk a $g(x)$ helyére a hozzárendelési utasításban y-t.

$y = x^2 + 4x + 4$

Ezután cseréljük fel x és y szerepét.



9. ábra. A $g^{-1}(x) = \sqrt{x} - 2$ inverz függvény

$x = y^2 + 4y + 4$

A kapott egyenletet oldjuk meg y-ra.

A jobb oldalt alakítsuk át.

$x = (y + 2)^2$

Mivel a leszűkített függvény értelmezési tartománya lesz az inverz értékkészlete, így tudjuk $y \geq -2$. Ebből következően $y + 2 \geq 0$, tehát ha mindkét oldalból gyököt vonunk, nincs szükség abszolút értékre. A következőt kapjuk:

$\sqrt{x} = y + 2$, amiből

$y = \sqrt{x} - 2.$

A g inverzének hozzárendelési utasítása tehát az alábbi:

$g^{-1}(x) = \sqrt{x} - 2.$

A négyzetgyök miatt ez a függvény csak a nem negatív számokon van értelmezve, így

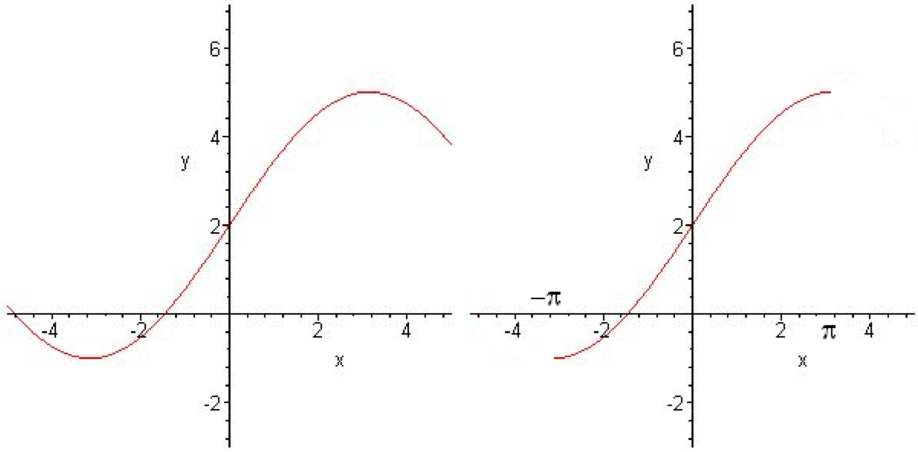
$D_{g^{-1}} = [0, \infty).$

Már korábban említettük, hogy az inverz értékkészlete a g függvény értelmezési tartománya, tehát

$R_{g^{-1}} = [-2, \infty)$

Ha ábrázoljuk a $g^{-1}(x) = \sqrt{x} - 2$ inverz függvényt, akkor mindez a grafikonról is leolvasható.

4. **Feladat:** Tekintsük az $f(x) = 3 \sin\left(\dfrac{x}{2}\right) + 2$ függvényt. Szűkítsük le a függvényt minél tágabb halmazra úgy, hogy a leszűkítés kölcsönösen



10. ábra. $f(x) = 3\sin\left(\frac{x}{2}\right) + 2$ és annak leszűkítése

egyértelmű legyen. Határozzuk meg ezen leszűkített függvény inverzét. Adjuk meg az inverz értelmezési tartományát és értékkészletét is!

Megoldás: A feladat az előzőhöz hasonló. Ott sokat segített a függvény grafikonja, ezért célszerűnek tűnik most is ábrát készíteni.

A sin függvény grafikonjából kaphatjuk meg f grafikonját lineráis transzformációkkal. Mivel a sin mögött nem x áll, hanem $\frac{x}{2}$, ezért x tengellyel párhuzamosan kétszeresre kell nyújtani a függvény grafikonját. A 3-as szorzó a sin előtt azt jelenti, hogy y tengellyel párhuzamosan háromszorosra kell nyújtani a grafikont. Végül a $+2$ miatt y tengellyel párhuzamosan, pozitív irányban, 2-vel el kell tolni a grafikont.

Jól látható, hogy a minden valós számra értelmezett függvény nem kölcsönösen egyértelmű, ezért nem invertálható. Ha azonban a $[-\pi, \pi]$ intervallumra leszűkítjük a függvényt, akkor egy szigorúan monoton növekvő függvényt kapunk. Ez kölcsönösen egyértelmű, így már invertálható. Ennél szélesebb intervallumon azonban már nem kölcsönösen egyértelmű a függvény.

Egy megfelelő leszűkítés így a következő:

$g(x) = 3\sin\left(\frac{x}{2}\right) + 2$ és $D_g = [-\pi, \pi]$.

Ezen g függvénynek határozzuk meg az inverzét.

Ehhez írjunk a $g(x)$ helyére a hozzárendelési utasításban y-t.

$y = 3\sin\left(\frac{x}{2}\right) + 2$

Ezután cseréljük fel x és y szerepét.

$x = 3\sin\left(\frac{y}{2}\right) + 2$

Majd fejezzük ki y-t az egyenletből. A rendezés első két lépése egyszerű. Vonjunk ki mindkét oldalból 2-t, majd osszunk 3-mal. Így a következőt kapjuk:

$\frac{x-2}{3} = \sin\left(\frac{y}{2}\right)$

Mivel az y a sin függvény argumentumában szerepel, ezért mindkét oldalnak vesszük az arcsin-át.

$\arcsin\frac{x-2}{3} = \arcsin\left(\sin\left(\frac{y}{2}\right)\right)$

Ez azért jó, mert így a jobb oldalon arcsin és sin áll egymás után egy összetett függvényben, melyek egymás inverzei, s általánosan igaz, hogy $f^{-1}(f(x)) = x$, ha x eleme azon leszűkítés értelmezési tartományának, melyen az f-et invertáljuk. Ezért egy ilyen összetett függvény egyszerűen az argumentummal egyenlő. Általánosságban is azt mondhatjuk, hogy ha egy egyenletben egy függvény mögött áll az ismeretlen, akkor az egyenlet mindkét oldalán vesszük a függvény inverzét. Így eltüntethtő a függvény, és az ismeretlen kifejezhető.

Az egyenletünk ezután a következő alakot ölti.

$\arcsin\frac{x-2}{3} = \frac{y}{2}$

Már csak 2-vel kell szoroznunk az egyenletet.

$2\arcsin\frac{x-2}{3} = y$

A g függvény inverze tehát a következő:

$g^{-1}(x) = 2\arcsin\frac{x-2}{3}$

Határozzuk meg ezen függvény legbővebb értelmezési tartományát.

Az arcsin miatti kikötés: $-1 \leq \frac{x-2}{3} \leq 1$

Rendezés után a következőt kapjuk:

$-1 \leq x \leq 5$

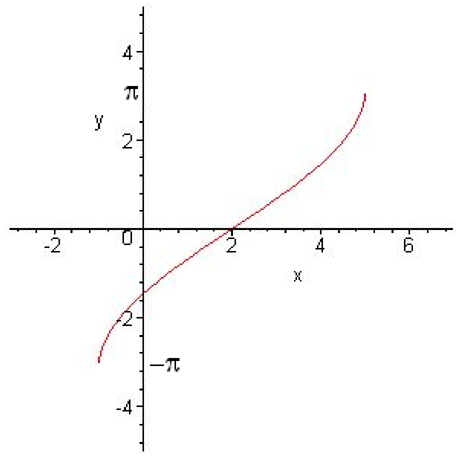
A $g^{-1}(x)$ függvény értelmezési tartománya tehát a következő:

$D_{g^{-1}} = [-1, 5]$.

Az ábráról leolvasható, hogy ez az eredeti függvény értékkészlete.

Mivel az invertálás során felcserélődik az értelmezési tartomány és az értékkészlet, így $g^{-1}(x)$ értékkészlete megegyezik a $g(x)$ értelmezési tartományával. Ennek következtében $R_{g^{-1}} = [-\pi, \pi]$.

Ha ábrázoljuk a $g^{-1}(x) = 2\arcsin\frac{x-2}{3}$ inverz függvényt, akkor mindez a grafikonról is leolvasható.



11. ábra. A $g^{-1}(x) = 2\arcsin\dfrac{x-2}{3}$ inverz függvény

Ezen függvény grafikonját, az arcsin függvény grafikonjából kaphatjuk meg lineris transzformációkkal.

Megjegyzés: Az utolsó két feladat ábráin jól látszik, hogy az eredeti és az inverz függvény grafikonja egymás türkörképe az $y = x$ egyenletű egyenesre nézve.

4. Számsorozatok

4.1. Alapfeladatok

1. **Feladat:** Határozzuk meg az $a_n = \dfrac{3n^2+7n}{5n^2+4}$ sorozat határértékét, ha létezik.

   Megoldás: Mivel egy tört határértéke a kérdés, ezért vizsgáljuk meg először, hogy létezik-e határértéke a számlálónak, és nevezőnek. Ha igen, akkor egyszerűen vennünk kell a két határérték hányadosát.

   Nyilvánvaló, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}(3n^2+7n)=\infty$, hiszen két olyan tag összegéről van szó, melyek mindegyike végtelenhez tart. A számlálónak tehát nincs határértéke.

   Hasonlót mondhatunk a nevezőről is, $\lim\limits_{n\to\infty}(5n^2+4)=\infty$. A nevezőnek sincs tehát határértéke.

   Az eddigieket röviden úgy fogalmazhatjuk meg, hogy a meghatározandó határérték $\dfrac{\infty}{\infty}$ típusú. Az ilyen típusú határértékek esetében bármilyen valós szám, sőt végtelen is lehet az eredmény, ezért az ilyen típust kritikusnak, vagy határozatlannak nevezzük. Ilyenkor átalakítjuk a sorozatot megadó kifejezést úgy, hogy már ne legyen kritikus típusú. A $\dfrac{\infty}{\infty}$ típusú határértékek esetében általában célszerű egyszerűsíteni úgy a törtet, hogy a nevező már ne tartson végtelenhez. Ezt úgy érhetjük el, ha a nevező leggyorsabban növekvő tagjával egyszerűsítünk.

   Jelen esetben az n^2 növekszik leggyorsabban a nevezőben, így célszerű ezzel egyszerűsíteni a törtet.

   $$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+7n}{5n^2+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{7}{n}}{5+\frac{4}{n^2}}$$

   Az átalakított tört már nem kritikus típusú, mert a számlálóban álló $\dfrac{7}{n}$, s a nevezőben levő $\dfrac{4}{n^2}$ mindegyike $\dfrac{\text{véges}}{\infty}$ típusú, így 0-hoz tartanak, a konstansok határértéke pedig önmaga a konstans.

   Ebből következően $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+\frac{7}{n}}{5+\frac{4}{n^2}}=\dfrac{3+0}{5+0}=\dfrac{3}{5}$.

2. **Feladat:** Határozzuk meg az $a_n = \dfrac{2n^3-4}{7n^2+9n}$ sorozat határértékét, ha létezik.

Megoldás: Az előző feladathoz hasonlóan, most is egy $\dfrac{\infty}{\infty}$ típusú határérték a kérdés. Ismét célszerű n^2-tel egyszerűsíteni a törtet, mert ez a leggyorsabban növekvő tag a nevezőben.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-4}{7n^2+9n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-\dfrac{4}{n^2}}{7+\dfrac{9}{n}}$$

A számlálóban álló $\dfrac{4}{n^2}$, és a nevezőben levő $\dfrac{9}{n}$ mindegyike 0-hoz tart, hiszen $\dfrac{\text{véges}}{\infty}$ típusúak.

Viszont a számlálóban most ezen kívül nem csak egy konstans maradt, hanem $2n$. Ez nyilván végtelenhez tart, s így a határérték a következő:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-\dfrac{4}{n^2}}{7+\dfrac{9}{n}} = \frac{\infty+0}{7+0} = \frac{\infty}{7} = \infty.$$

A sorozat tehát nem konvergens, nincs határértéke.

3. **Feladat:** Határozzuk meg az $a_n = \dfrac{6n+5}{2n^3-9n}$ sorozat határértékét, ha létezik.

   Megoldás: A kérdéses határérték ismét $\dfrac{\infty}{\infty}$ típusú, de most a nevezőben n^3 növekszik a leggyorsabban, így ezzel célszerű egyszerűsíteni.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n+5}{2n^3-9n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{6}{n^2}+\dfrac{5}{n^3}}{2-\dfrac{9}{n^2}}$$

   Tudjuk, hogy $\dfrac{6}{n^2} \longrightarrow 0$, $\dfrac{5}{n^3} \longrightarrow 0$ és $\dfrac{9}{n^2} \longrightarrow 0$, mert mindegyik $\dfrac{\text{véges}}{\infty}$ típusú. Ebből következően a határérték a következő:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{6}{n^2}+\dfrac{5}{n^3}}{2-\dfrac{9}{n^2}} = \frac{0+0}{2-0} = \frac{0}{2} = 0.$$

4. **Feladat:** Határozzuk meg az $a_n = \dfrac{\sqrt{3n^4+n}}{7n^2-6}$ sorozat határértékét, ha létezik.

   Megoldás: A számlálóban a gyök alatti kifejezés nyilván végtelenhez tart, s ebből következően az egész gyökös kifejezés is végtelenhez tart, s így a tört megint $\dfrac{\infty}{\infty}$ típusú.

   A nevezőben n^2 növekszik a leggyorsabban, így ezzel célszerű egyszerűsíteni. A számláló osztásánál figyeljünk oda! Gyökös kifejezés osztása esetén, a gyök alatt már az osztó négyzetével kell osztani. Tehát ha n^2-tel egyszerűsítünk, akkor a számlálóban a gyök alatt n^4-nel kell osztanunk.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n^4+n}}{7n^2-6} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3+\frac{1}{n^3}}}{7-\frac{6}{n^2}}$$

Mivel $\frac{1}{n^3} \longrightarrow 0$ és $\frac{6}{n^2} \longrightarrow 0$, ezért a határérték a következő:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3+\frac{1}{n^3}}}{7-\frac{6}{n^2}} = \frac{\sqrt{3+0}}{7-0} = \frac{\sqrt{3}}{7}.$$

5. **Feladat:** Határozzuk meg az $a_n = \dfrac{3^n-5}{4^n+9}$ sorozat határértékét, ha létezik.

   Megoldás: Mivel 3^n és 4^n mindegyike végtelenhez tart, így megint egy $\frac{\infty}{\infty}$ típusú határérték a kérdés. Ismét egy megfelelő egyszerűsítés segít rajtunk. Jelen esetben 4^n-nel célszerű egyszerűsíteni a törtet.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n-5}{4^n+9} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^n}{4^n}-\frac{5}{4^n}}{1+\frac{9}{4^n}}$$

A számlálóban levő első tört számlálójában és nevezőjében megegyezik a kitevő, így ezt írhatjuk egyetlen tört hatványaként is.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^n}{4^n}-\frac{5}{4^n}}{1+\frac{9}{4^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{5}{4^n}}{1+\frac{9}{4^n}}$$

A számlálóban álló $\left(\frac{3}{4}\right)^n \longrightarrow 0$, mert $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$, ha a olyan valós szám, melyre $-1 < a < 1$ teljesül. Ugyancsak 0-hoz tart az $\frac{5}{4^n}$ és a $\frac{9}{4^n}$ is, hiszen ezek $\frac{\text{véges}}{\infty}$ típusúak.

Ezek felhasználásával a határérték a következő:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{5}{4^n}}{1+\frac{9}{4^n}} = \frac{0-0}{1+0} = 0.$$

6. **Feladat:** Határozzuk meg az $a_n = \dfrac{2^{3n}+5^n}{8^n+3^n}$ sorozat határértékét, ha létezik.

Megoldás: Feladatunk nagyon hasonlít az előzőre, nyilván most is egy $\frac{\infty}{\infty}$ típusú határértékkel állunk szemben. Kicsi változás az előzőhöz képest, hogy most nem csak n fordul elő a kitevőben, hanem $3n$ is. Jobb lenne azonban, ha mindenütt, csak n szerepelne. Használjuk fel a hatványozás azonosságai közül a következőt:

$a^{b\cdot c} = \left(a^b\right)^c$

Ebből következően: $2^{3n} = \left(2^3\right)^n = 8^n$.

Ezután a következőt írhatjuk:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{3n} + 5^n}{8^n + 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{8^n + 5^n}{8^n + 3^n}$$

Így már egyértelmű, hogy 8^n-nel célszerű egyszerűsíteni a törtet.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8^n + 5^n}{8^n + 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{5^n}{8^n}}{1 + \frac{3^n}{8^n}}$$

A számlálóban és nevezőben levő kicsi törteket írhatjuk egyetlen tört hatványaként is.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{5^n}{8^n}}{1 + \frac{3^n}{8^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \left(\frac{5}{8}\right)^n}{1 + \left(\frac{3}{8}\right)^n}$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{5}{8}\right)^n = 0$, és $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3}{8}\right)^n = 0$, hiszen mindkét esetben a^n típusú kifejezés határértékéről van szó, ahol teljesül, hogy $-1 < a < 1$, ezért már meghatározható az eredeti tört határértéke is.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \left(\frac{5}{8}\right)^n}{1 + \left(\frac{3}{8}\right)^n} = \frac{1+0}{1+0} = 1$$

7. **Feladat:** Határozzuk meg az $a_n = \frac{3^{2n} - 6}{7^n + 4^n}$ sorozat határértékét, ha létezik.

Megoldás: A határérték nyilván $\frac{\infty}{\infty}$ típusú, és a tört jellege hasonló az előző feladatban szereplőéhez, így haladjunk ugyanúgy mint az előbb.

Első lépésként alakítsuk át a 3^{2n}-t, írjuk inkább $\left(3^2\right)^n = 9^n$ formában.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{2n} - 6}{7^n + 4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{9^n - 6}{7^n + 4^n}$$

Ezután 7^n-nel egyszerűsítsük a törtet.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{9^n-6}{7^n+4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{9^n}{7^n}-\dfrac{6}{7^n}}{1+\dfrac{4^n}{7^n}}$$

Ahol a számlálóban és a nevezőben azonos kitevő szerepel, ott írjuk inkább a tört hatványát.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{9}{7}\right)^n-\dfrac{6}{7^n}}{1+\left(\dfrac{4}{7}\right)^n}$$

Ezután vizsgáljuk külön a szereplő kicsi törtek határértékét!

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6}{7^n}=0$ mert $\dfrac{\text{véges}}{\infty}$ típusú.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4}{7}\right)^n=0$, mert a^n típusú, ahol $-1<a<1$.

Viszont $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{9}{7}\right)^n=\infty$, mert a^n típusú, de itt $a>1$.

Ezen részletek alapján az eredeti határérték a következő:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{9}{7}\right)^n-\dfrac{6}{7^n}}{1+\left(\dfrac{4}{7}\right)^n}=\frac{\infty-0}{1+0}=\infty$$

A sorozat tehát nem konvergens, nincs határértéke.

8. **Feladat:** Határozzuk meg az $a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ sorozat határértékét, ha létezik.

Megoldás: Most nem tört határértéke a kérdés, hanem egy különbségé. Nyilvánvaló, hogy $\sqrt{n+1}$ és $\sqrt{n}$ mindegyike végtelenhez tart, amit úgy is mondhatunk, hogy egy $\infty-\infty$ típusú határérték a kérdés. Az ilyen típusú határértékek ugyanúgy kritikusak, mint a $\dfrac{\infty}{\infty}$ típusú határértékek. Most átalakítási lehetőségnek a gyöktelenítés kínálkozik, amit a középiskolai tanulmányok során általában nevezőben alkalmaztunk. Az volt a lényege, hogy két gyökös kifejezés különbségét bővítettük ugyanazon két gyökös kifejezés összegével. (Két gyökös kifejezés összegét pedig a különbségükkel bővítettük, de ez most nem érdekes számunkra.) Mindezt formulákkal a következő módon írhatjuk:

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Alkalmazzuk most ezt a határértékünk meghatározására.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

A számlálóban már csak egy konstans áll, így elég a nevezőt vizsgálnunk. A megoldás elején már említettük, hogy $\sqrt{n+1}$ és $\sqrt{n}$ mindegyike végtelenhez tart. A nevezőben most ezeknek nem különbsége, hanem összege áll, így ez nem kritikus. Két végtelenhez tartó kifejezés összege nyilvánvalóan maga is végtelenhez tart. Konyhanyelven ezt úgy mondhatjuk röviden, hogy $\infty + \infty = \infty$. A törtünk nevezője tehát végtelenhez tart, ami azt jelenti, a tört $\frac{\text{véges}}{\infty}$ típusú, s így határértéke 0, azaz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0.$$

9. **Feladat:** Határozzuk meg az $a_n = \sqrt{3n+5} - \sqrt{3n-2}$ sorozat határértékét, ha létezik.

   Megoldás: A feladat nagyon hasonlít az előzőre, két végtelenhez tartó kifejezés különbségével állunk szemben. Használjuk a gyöktelenítést, mint az előző feladatban.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{3n+5} - \sqrt{3n-2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{3n+5} - \sqrt{3n-2})(\sqrt{3n+5} + \sqrt{3n-2})}{\sqrt{3n+5} + \sqrt{3n-2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+5)-(3n-2)}{\sqrt{3n+5} + \sqrt{3n-2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{7}{\sqrt{3n+5} + \sqrt{3n-2}}$$

   Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a gyöktelenítés után a kifejezéseket zárójelbe kell tenni, mert minden 'hosszú' műveleti jel egyben zárójel is. A $3n+5$ esetében nincs jelentősége ennek a zárójelnek, mert a kifejezés előtt semmilyen szorzó vagy előjel nem áll. Viszont a $3n-2$ esetén már fontos a zárójel, hiszen előtte negatív előjel van.

   A számlálóban már csak egy konstans áll, ezért elég a nevezőt vizsgálnunk. Mivel $\sqrt{3n+5}$ és $\sqrt{3n-2}$ mindegyike végtelenhez tart, ezért összegük is végtelenhez tart. Amint az előző feladatban, úgy most is egy $\frac{\text{véges}}{\infty}$ típusú törtet kaptunk, aminek határértéke 0, azaz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7}{\sqrt{3n+5} + \sqrt{3n-2}} = 0.$$

10. **Feladat:** Határozzuk meg az $a_n = \left(\frac{n+3}{n}\right)^n$ sorozat határértékét, ha létezik.

    Megoldás: Most egy hatvány határértéke a kérdés, ezért külön megvizsgáljuk az alapot és a kitevőt, hogy hova tartanak. A kitevő az egyszerűbb, nyilván végtelenhez tart. Az alap egy tört, amelynek számlálója és nevezője is végtelenhez tart. Ilyen törtekkel foglalkoztunk az első feladatokban, s amint kiderült, ilyenkor célszerű egyszerűsíteni. Most n-nel egyszerűsítsünk.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n}}{1} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{3}{n}\right)$$

Mivel $\frac{3}{n}$ egy $\frac{\text{véges}}{\infty}$ típusú tört, ezért 0-hoz tart, s ebből következően:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{3}{n}\right) = 1.$$

Az eddigieket úgy fogalmazhatjuk meg, hogy a feladatban egy 1^∞ típusú határérték a kérdés. Az ilyen típúsú határértékek kritikusak, ezért át kell alakítanunk őket a határérték meghatározásához. Amint az előbb láthattuk, az alap nem csak egyetlen törtként írható, hanem felbontható 1 és egy tört összegére az alábbi módon:

$$\frac{n+3}{n} = 1 + \frac{3}{n}.$$

Használjuk ezt fel.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{3}{n}\right)^n$$

Ezzel lényegében készen is vagyunk, hiszen tudjuk,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k.$$

Most a k szerepét a 3 tölti be a kifejezésben, ebből következően:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{3}{n}\right)^n = e^3.$$

Megjegyzés: A megoldás során felhasználtuk, hogy az alap nem csak egyetlen törtként írható, hanem felbontható egy összegre. Ezt az alakot most egyszerűsítés után kaptuk meg, de ez nem mindig járható út. Viszont ha egy tört számlálójában összeg, vagy különbség áll, akkor az mindig felbontható két tört összegére, illetve különbségére úgy, hogy a nevezővel külön osztjuk a számláló tagjait. Ebben a feladatban a következőt jelenti ez:

$$\frac{n+3}{n} = \frac{n}{n} + \frac{3}{n}$$

Természetesen az első törtet egyszerűsítjük, így kapjuk a már korábban felírt alakot.

$$\frac{n}{n} + \frac{3}{n} = 1 + \frac{3}{n}$$

A későbbiekben az ilyen átalakítási módot még többször fogjuk használni.

11. **Feladat:** Határozzuk meg az $a_n = \left(\dfrac{5n+6}{5n-1}\right)^{5n-1}$ sorozat határértékét, ha létezik.

Megoldás: Mivel hatványról van szó, vizsgáljuk meg külön az alap és a kitevő határértékét. A kitevő nyilván ∞-hez tart.

Az alapot egyszerűsítsük n-nel.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n+6}{5n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{5+\frac{6}{n}}{5-\frac{1}{n}} = \frac{5+0}{5-0} = 1$$

A feladatban szereplő hatvány tehát 1^∞ típusú. Alakítsuk át az alapot az előző feladat megoldásának végén levő megjegyzésben leírtak szerint, azonban az egyetlen tört két törtre darabolása előtt a számlálót bontsuk két tagra úgy, hogy az egyik tag a nevezővel egyezzen meg. Így a felbontás után az első tört egyszerűsíthető lesz, és éppen 1-gyel lesz egyenlő.

$$\frac{5n+6}{5n-1} = \frac{(5n-1)+7}{5n-1} = \frac{5n-1}{5n-1} + \frac{7}{5n-1} = 1 + \frac{7}{5n-1}$$

Írjuk ebben a formában a határértékben az alapot.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{5n+6}{5n-1}\right)^{5n-1} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{7}{5n-1}\right)^{5n-1}$$

Az előző feladatban már hivatkoztunk arra, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{k}{n}\right)^n = e^k$.

Most lényegében ilyen típusú kifejezés határértéke a kérdés, csak annyi a különbség, hogy n szerepét az $5n-1$ vette át. Ez a kifejezés került mindenütt n helyére. Azt is megtehetjük, hogy bevezetünk egy jelölést ezen kifejezésre, például legyen $t = 5n-1$, és így írjuk fel a határértéket. Mivel $n \longrightarrow \infty$ esetén $(5n-1) \longrightarrow \infty$, ezért a határértékben $t \longrightarrow \infty$ fog állni.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{7}{5n-1}\right)^{5n-1} = \lim_{t\to\infty} \left(1+\frac{7}{t}\right)^t$$

Ez láthatóan csak más betűvel van írva, mint a $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{k}{n}\right)^n$ határérték, valamint a k szerepét most a 7 tölti be. Ezek alapján az eredmény:

$$\lim_{t\to\infty} \left(1+\frac{7}{t}\right)^t = e^7.$$

12. **Feladat:** Határozzuk meg az $a_n = \left(\dfrac{4n+1}{4n+3}\right)^{4n+3}$ sorozat határértékét, ha létezik.

Megoldás: Egy hatványról van szó, tehát vizsgáljuk meg külön az alap és a kitevő határértékét. A kitevő nyilván ∞-hez tart.

Az alapot egyszerűsítsük n-nel.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n+1}{4n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{4+\frac{1}{n}}{4+\frac{3}{n}} = \frac{4+0}{4+0} = 1$$

A feladatban szereplő hatvány tehát 1^∞ típusú. Alakítsuk át az alapot az előző feladatban leírtak mintájára. A számlálót bontsuk két tagra úgy, hogy az egyik tag a nevezővel egyezzen meg, majd a törtet bontsuk két törtre, és egyszerűsítsünk.

$$\frac{4n+1}{4n+3} = \frac{(4n+3)-2}{4n+3} = \frac{4n+3}{4n+3} - \frac{2}{4n+3} = 1 - \frac{2}{4n+3}$$

Írjuk ebben a formában a határértékben az alapot.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n+1}{4n+3}\right)^{4n+3} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{4n+3}\right)^{4n+3}$$

Ismét jó lenne hivatkozni arra, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k$, de most eltérés van egy előjelben. Ezért a tört előtti negatív előjelet vigyük a tört számlálójába.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{4n+3}\right)^{4n+3} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-2}{4n+3}\right)^{4n+3}$$

Most már formailag teljesen olyan, mint a $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{k}{n}\right)^n$ határérték, csak annyi a különbség, hogy n szerepét a $4n+3$ vette át. Ez a kifejezés került a nevezőben és a kitevőben is n helyére. Bevezethetjük a $t = 4n+3$ jelölést, majd felírhatjuk t-vel a határértéket. Mivel $n \longrightarrow \infty$ esetén $(4n+3) \longrightarrow \infty$, ezért a határértékben $t \longrightarrow \infty$ fog állni.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-2}{4n+3}\right)^{4n+3} = \lim_{t\to\infty} \left(1 + \frac{-2}{t}\right)^{t}$$

Ez láthatóan csak más betűvel van írva, mint a $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{k}{n}\right)^n$ határérték, valamint a k szerepét most a -2 tölti be. Ezek alapján az eredmény:

$$\lim_{t\to\infty} \left(1 + \frac{-2}{t}\right)^{t} = e^{-2}.$$

4.2. Összetett feladatok

1. **Feladat:** Vizsgáljuk meg az $a_n = \dfrac{5n+7}{4n-3}$ sorozatot monotonitás szempontjából! Ha korlátos a sorozat, adjuk meg a legnagyobb alsó és a legkisebb felső korlátot! Határozzuk meg a sorozat határértékét, és adjunk meg $\varepsilon = 10^{-2}$-hoz küszöbindexet!

Megoldás: Egy sorozat vizsgálata monotonitás szempontjából azt jelenti, hogy növekedés, csökkenés szempontjából vizsgáljuk a sorozatot. Ezt legegyszerűbben talán úgy hatjhatjuk végre, ha összehasonlítjuk a sorozat két szomszédos elemét, hogy melyikük nagyobb. Felhívjuk azonban a figyelmet arra, hogy nem két konkrét elemet kell összehasonlítani, hanem általánosságban két szomszédos elemet. Ha például összehasonlítjuk a_1-et és a_2-t, akkor az még semmit nem jelent a nagyobb indexű elemkre nézve. Ezért az összehasonlítást általánosan kell elvégezni a_n és a_{n+1} között. Célszerű venni a két szomszédos elem különbségét, és annak előjelét vizsgálni. Ha például az $a_{n+1} - a_n$ különbség minden $n \in I\!N$ esetén pozitív, akkor a sorozat szigorúan monoton nő, amit úgy is mondhatunk, hogy két elem közül mindig a nagyobb indexű a nagyobb.

Ennyi magyarázat után térjünk rá a konkrét sorozat vizsgálatára. Elsőként írjuk fel a sorozat $n+1$-edik elemét. Ezt úgy kapjuk, hogy a sorozatot megadó $a_n = \dfrac{5n+7}{4n-3}$ kifejezésben az n helyére $n+1$-et helyettesítünk.

$$a_{n+1} = \frac{5(n+1)+7}{4(n+1)-3}$$

Természetesen ezt célszerű egyszerűbb alakban írni, felbontani a zárójeleket, és összevonni.

$$a_{n+1} = \frac{5(n+1)+7}{4(n+1)-3} = \frac{5n+5+7}{4n+4-3} = \frac{5n+12}{4n+1}$$

Ezután vegyük a szomszédos elemek különbségét.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{5n+12}{4n+1} - \frac{5n+7}{4n-3}$$

Hozzunk közös nevezőre, majd a számlálóban bontsuk fel a zárójeleket és vonjunk össze.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{5n+12}{4n+1} - \frac{5n+7}{4n-3} = \frac{(5n+12)(4n-3)-(5n+7)(4n+1)}{(4n+1)(4n-3)} =$$

$$\frac{(20n^2-15n+48n-36)-(20n^2+5n+28n+7)}{(4n+1)(4n-3)} =$$

$$\frac{(20n^2+33n-36)-(20n^2+33n+7)}{(4n+1)(4n-3)} = \frac{-43}{(4n+1)(4n-3)}$$

Amint látható, a számlálóban csak egy konstans maradt, mely most épp negatív. A nevező biztosan pozitív, mert a $4n+1$ és $4n-3$ tényezők pozitívak, hiszen $n \in I\!N$, azaz $n = 1, 2, 3 \cdots$. Ezért a tört értéke minden $n \in I\!N$ esetén negatív lesz.

Ez pontosan azt jelenti, hogy $a_{n+1} - a_n < 0$ minden $n \in I\!N$ esetén, azaz

$a_{n+1} < a_n$ minden $n \in I\!N$ esetén.

A sorozat tehát szigorúan monoton csökken, hiszen két elem közül mindig a kisebb indexű a nagyobb.

Ezután határozzuk meg a sorozat határértékét. Ehhez egyszerűsítsünk n-nel.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n+7}{4n-3} = \lim_{n\to\infty} \frac{5+\frac{7}{n}}{4-\frac{3}{n}} = \frac{5+0}{4-0} = \frac{5}{4} = 1.25$$

Ezután foglalkozzunk a korlátossággal.

Mivel a sorozat szigorúan monoton csökken, ezért felülről biztosan korlátos, hiszen az első eleme a legnagyobb, a többi annál biztosan kisebb. Ez egyben azt is jelenti, hogy a sorozat legkisebb felső korlátja az első elem. A legkisebb felső korlátot gyakran K-val jelölik, így most $K = a_1 = \frac{5\cdot 1+7}{4\cdot 1-3} = 12$. Ez a szám felső korlát, hiszen a sorozat egyetlen eleme sem nagyobb nála. Ennél kisebb felső korlát azonban nincs, hiszen a_1 a 12-nél kisebb számok bármelyikénél nagyobb.

Alulról is korlátos, mert ha monoton csökken és van határértéke, akkor a határérték egyben alsó korlát is. Gondoljuk át, ha lenne a sorozatnak a határértéknél kisebb eleme, akkor az annál nagyobb indexű elemek a szigorúan monoton csökkenés miatt még kisebbek kellene, hogy legyenek. Ekkor azonban a sorozat már távolodna a határértéktől az index növekedésével, ami ellentmondás. A legnagyobb alsó korlátot gyakran k-val jelölik, így ezen sorozatnál $k = \frac{5}{4}$. Ennél nagyobb szám azért nem alsó korlát, mert a határértéket a sorozat elemei minden határon túl megközelítik, így bármely $\frac{5}{4}$-nél nagyobb szám esetén létezik a sorozatnak olyan eleme, ami kisebb nála.

Még küszöbindexet kell számolnunk a megadott $\varepsilon = 10^{-2}$ értékhez. Ez azt jelenti, hogy olyan természetes számot kell meghatároznunk, amelynél nagyobb indexű elemei a sorozatnak ε-nál kevesebbel térnek el a határértéktől. Fogalmazzuk meg ezt matematikai jelekkel is. Nyilván egyenlőtlenséget kell felírnunk, s ezen egyenlőtlenség megoldásával kapunk majd küszöbszámot. A szövegnek megfelelő egyenlőtlenség a következő:

$$\left|\lim_{n\to\infty} a_n - a_n\right| < \varepsilon.$$

Az abszolút értékre azért van szükség, mert a határérték és a_n különbsége lehet negatív is, de a kettő eltérése viszont nem. Két szám eltérése a különbségük abszolút értéke.

Helyettesítsük be ezen általánosan felírt egyenlőtlenségbe a feladatban szereplő adatokat.

$$\left|\frac{5}{4} - \frac{5n+7}{4n-3}\right| < 10^{-2} = \frac{1}{100}$$

Oldjuk meg az egyenlőtlenséget. Első lépésként hozzunk közös nevezőre az abszolút értéken belül, és a kapott tört számlálójában és nevezőjében végezzük el a műveleteket.

$$\left|\frac{5(4n-3) - 4(5n+7)}{4(4n-3)}\right| < \frac{1}{100}$$

$$\left|\frac{20n - 15 - 20n - 28}{16n - 12}\right| < \frac{1}{100}$$

$$\left|\frac{-43}{16n - 12}\right| < \frac{1}{100}$$

Most vizsgáljuk meg az abszolút értéken belül álló törtet. Számlálója negatív, nevezője biztosan pozitív, mert $n \in I\!N$, azaz $n = 1, 2, 3 \cdots$. Egy negatív szám abszolút értéke egyenlő a szám -1-szeresével, azaz jelen esetben $\left|\frac{-43}{16n-12}\right| = (-1) \cdot \frac{-43}{16n-12} = \frac{43}{16n-12}$

Ezt írhatjuk tehát az egyenlőtlenségbe, s így elhagyhatjuk az abszolút értéket.

$$\frac{43}{16n - 12} < \frac{1}{100}$$

Ezután rendezzük n-re az egyenlőtlenséget.

$$4300 < 16n - 12$$

$$4312 < 16n$$

$$n > \frac{4312}{16} = 269.5$$

Azt kaptuk tehát, hogy ha a sorozatnak olyan elemét vesszük, melynek indexe nagyobb mint 269.5 akkor az elem biztosan közelebb lesz a határértékhez 0.01-nál. Ez azt jelenti, hogy $\varepsilon = 10^{-2}$-hoz tartozó küszöbszám a 269, és minden ennél nagyobb szám. Ha a legkisebb küszöbszám meghatározása a feladat, akkor az jelen esetben a 269.

Megjegyzés: Számoljuk ki a sorozat 269. és 270. elemét.

$$a_{269} = \frac{5 \cdot 269 + 7}{4 \cdot 269 - 3} \cong 1.2600186$$

$$a_{270} = \frac{5 \cdot 270 + 7}{4 \cdot 270 - 3} \cong 1.2599814$$

Amint látható, a 269. elem, még 0.01-nál többel tér el a határértéktől, de a 270. elem már 0.01-nál kevesebbel. A 269. elem a legnagyobb indexű olyan elem, mely 0.01-nál többel tér el a határértéktől.

2. **Feladat:** Vizsgáljuk meg az $a_n = \frac{1-9n}{5n-4}$ sorozatot monotonitás szempontjából! Ha korlátos a sorozat, adjuk meg a legnagyobb alsó és a

legkisebb felső korlátot! Határozzuk meg a sorozat határértékét, és adjunk meg $\varepsilon = 10^{-3}$-hoz küszöbindexet!

Megoldás: A feladat ugyanolyan, mint az előző, így használjuk mintának annak megoldását.

A monotonitás vizsgálatához vegyük két szomszédos elem különbségét, és határozzuk meg annak előjelét.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1-9(n+1)}{5(n+1)-4} - \frac{1-9n}{5n-4} = \frac{-8-9n}{5n+1} - \frac{1-9n}{5n-4} =$$
$$= \frac{(-8-9n)(5n-4)-(1-9n)(5n+1)}{(5n+1)(5n-4)} =$$
$$= \frac{(-40n+32-45n^2+36n)-(5n+1-45n^2-9n)}{(5n+1)(5n-4)} =$$
$$= \frac{(32-4n-45n^2)-(1-4n-45n^2)}{(5n+1)(5n-4)} = \frac{31}{(5n+1)(5n-4)}$$

Olyan törtet kaptunk, melynek számlálója és nevezője is pozitív minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, így maga a tört is pozitív. Most tehát $a_{n+1}-a_n > 0$, azaz $a_{n+1} > a_n$, s ez az egyenlőtlenség minden $n \in \mathbb{N}$ esetén teljesül. Ebből következően a sorozat szigorúan monoton nő.

Határozzuk meg a határértéket.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-9n}{5n-4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}-9}{5-\frac{4}{n}} = \frac{0-9}{5-0} = -\frac{9}{5} = -1.8$$

Mivel a sorozat szigorúan monoton nő, ezért az első elem most a legnagyobb alsó korlát lesz, azaz $k = a_1 = \dfrac{1-9\cdot 1}{5\cdot 1-4} = -8$, a határérték pedig a legkisebb felső korlát, azaz $K = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\dfrac{9}{5}$.

Végül határozzunk meg $\varepsilon = 10^{-3}$-hoz küszöbindexet.

Ehhez az alábbi egyenlőtlenségből indulunk el.

$$\left|\lim_{n\to\infty} a_n - a_n\right| < \varepsilon.$$

Ebbe behelyettesítjük a feladat adatait.

$$\left|-\frac{9}{5} - \frac{1-9n}{5n-4}\right| < 10^{-3} = \frac{1}{1000}$$
$$\left|\frac{(-9)(5n-4)-5(1-9n)}{5(5n-4)}\right| < \frac{1}{1000}$$
$$\left|\frac{31}{25n-20}\right| < \frac{1}{1000}$$

Most vizsgáljuk meg az abszolút értéken belül álló törtet. Számlálója is, nevezője is pozitív, minden $n \in \mathbb{N}$, azaz $n = 1, 2, 3\cdots$ esetén.

Egy pozitív szám abszolút értéke egyenlő magával a számmal, így az abszolút érték most egyszerűen elhagyható.

Ezután az egyenlőtlenség a következő:

$\dfrac{31}{25n-20} < \dfrac{1}{1000}.$

Rendezzük ezt n-re.

$31000 < 25n - 20$

$31020 < 25n$

$n > \dfrac{31020}{25} = 1240.8$

Az egyenlőtlenség megoldását lefelé kerekítve már küszöbszámot kapunk, azaz 1240 már küszöbszám, de minden ennél nagyobb természetes szám is küszöbszám. Az 1240 a legkisebb $\varepsilon = 10^{-3}$-hoz tartozó küszöbszám.

3. **Feladat:** Határozzuk meg az $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{2n^4-3n}}{\sqrt{5n^3+8}}$ sorozat határértékét, ha létezik.

Megoldás: Nyilvánvaló, hogy a számláló is és a nevező is végtelenhez tart, azaz egy $\dfrac{\infty}{\infty}$ típusú határérték a kérdés. Az alapfeladatokban ilyen esetben egyszerűsítettünk a törtet. Most a különböző gyökök miatt nehézkes lenne az egyszerűsítés, ezért haladjunk egy kicsit másképp. A számlálóban és a nevezőben is emeljük ki a gyök alatt a leggyorsabban növekvő részt.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{2n^4-3n}}{\sqrt{5n^3+8}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4\left(2-\dfrac{3}{n^3}\right)}}{\sqrt{n^3\left(5+\dfrac{8}{n^3}\right)}}$$

A szorzatokból vonjunk tényezőnként gyököt.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4\left(2-\dfrac{3}{n^3}\right)}}{\sqrt{n^3\left(5+\dfrac{8}{n^3}\right)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4}\cdot\sqrt[3]{2-\dfrac{3}{n^3}}}{\sqrt{n^3}\cdot\sqrt{5+\dfrac{8}{n^3}}}$$

Bontsuk fel ezután a törtet két tört szorzatára.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4}\cdot\sqrt[3]{2-\dfrac{3}{n^3}}}{\sqrt{n^3}\cdot\sqrt{5+\dfrac{8}{n^3}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4}}{\sqrt{n^3}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2-\dfrac{3}{n^3}}}{\sqrt{5+\dfrac{8}{n^3}}}$$

A második tört határértékének meghatározása könnyű, mert a gyökök alatti törtek 0-hoz tartanak. Foglakozzunk ezért csak az első törttel.

Mivel a számlálóban és a nevezőben csupán n egy hatványa áll valamilyen gyök alatt, így törtkitevős hatványokat írhatunk inkább.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4}}{\sqrt{n^3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2-\frac{3}{n^3}}}{\sqrt{5+\frac{8}{n^3}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{4/3}}{n^{3/2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2-\frac{3}{n^3}}}{\sqrt{5+\frac{8}{n^3}}}$$

A két hatvány hányadosát egyetlen hatványként is írhatjuk.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{4/3}}{n^{3/2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2-\frac{3}{n^3}}}{\sqrt{5+\frac{8}{n^3}}} = \lim_{n\to\infty} n^{(4/3-2/3)} \cdot \frac{\sqrt[3]{2-\frac{3}{n^3}}}{\sqrt{5+\frac{8}{n^3}}} =$$

A kitevőben végezzük el a kivonást.

$$\lim_{n\to\infty} n^{(4/3-2/3)} \cdot \frac{\sqrt[3]{2-\frac{3}{n^3}}}{\sqrt{5+\frac{8}{n^3}}} = \lim_{n\to\infty} n^{(-1/6)} \cdot \frac{\sqrt[3]{2-\frac{3}{n^3}}}{\sqrt{5+\frac{8}{n^3}}}$$

Ezután határozzuk meg az első tényező határértékét. Tudjuk, hogy n negatív kitevős hatványai 0-hoz tartanak, ha n tart a végtelenbe, így az első tényező 0-hoz tart.

Ezek alapján az eredeti határérték a következő:

$$\lim_{n\to\infty} n^{(-1/6)} \cdot \frac{\sqrt[3]{2-\frac{3}{n^3}}}{\sqrt{5+\frac{8}{n^3}}} = 0 \cdot \frac{\sqrt[3]{2-0}}{\sqrt{5+0}} = 0$$

Megjegyzés: A megoldás során említettük, hogy n negatív kitevős hatványai 0-hoz tartanak. Felvetődik a kérdés, mi a határérték, egyéb esetekben. Ezt röviden az alábbi módon tudjuk leírni:

$$\lim_{n\to\infty} n^a = \begin{cases} \infty, \text{ ha } a > 0 \\ 1, \text{ ha } a = 0 \\ 0, \text{ ha } a < 0 \end{cases}.$$

A pozitív kitevős hatványok tehát végtelenhez, a negatív kitevősek pedig 0-hoz tartanak. Ha pedig 0 a kitevő, akkor 1 a határérték.

4. **Feladat:** Határozzuk meg az $a_n = \dfrac{9^{n+1}+5^{n-2}}{7^{n+2}+3^{2n-1}}$ sorozat határértékét, ha létezik.

Megoldás: A határérték nyilván $\dfrac{\infty}{\infty}$ típusú. Hasonló feladattal találkoztunk már az alapfeladatok között. Használjuk a hatványozás azonosságait, és érjük el, hogy mindenütt csak n álljon kitevőben.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{9^{n+1}+5^{n-2}}{7^{n+2}+3^{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{9\cdot 9^n + \frac{1}{25}\cdot 5^n}{49\cdot 7^n + \frac{1}{3}\cdot 3^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{9\cdot 9^n + \frac{1}{25}\cdot 5^n}{49\cdot 7^n + \frac{1}{3}\cdot 9^n}$$

Ezután egyszerűsítsünk 9^n-nel.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{9\cdot 9^n+\frac{1}{25}\cdot 5^n}{49\cdot 7^n+\frac{1}{3}\cdot 9^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{9+\frac{1}{25}\cdot\frac{5^n}{9^n}}{49\cdot\frac{7^n}{9^n}+\frac{1}{3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{9+\frac{1}{25}\cdot\left(\frac{5}{9}\right)^n}{49\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^n+\frac{1}{3}}$$

A részleteket vizsgálva azt látjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5}{9}\right)^n=0$, valamint $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^n=0$, hiszen mindkettő a^n típusú, ahol $-1<a<1$.

Ebből pedig már az egész tört határértéke is meghatározható.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{9+\frac{1}{25}\cdot\left(\frac{5}{9}\right)^n}{49\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^n+\frac{1}{3}}=\frac{9+\frac{1}{25}\cdot 0}{49\cdot 0+\frac{1}{3}}=27$$

5. **Feladat:** Határozzuk meg az $a_n=\sqrt{3n+4}-\sqrt{2n-1}$ sorozat határértékét, ha létezik.

Megoldás: A határérték nyilván most $\infty-\infty$ típusú. Az alapfeladatok között ehhez hasonlóval is találkoztunk. Az ottani megoldásban ismertetett módon indulhatunk, azaz gyöktelenítünk.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n+4}-\sqrt{2n-1}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{3n+4}-\sqrt{2n-1})(\sqrt{3n+4}+\sqrt{2n-1})}{\sqrt{3n+4}+\sqrt{2n-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+4)-(2n-1)}{\sqrt{3n+4}+\sqrt{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+5}{\sqrt{3n+4}+\sqrt{2n-1}}$$

Az alapfeladatoknál ennyi elég is volt a határérték meghatározásához, mert ott a gyöktelenítés után már csak egy konstans maradt a számlálóban, így $\frac{\text{véges}}{\infty}$ típust kaptunk, ami nem kritikus. Most azonban a számlálóban szerepel az n, így az végtelenhez tart, s így a tört $\frac{\infty}{\infty}$ típusú, ami kritikus.

Emeljünk ki a számlálóban és a nevezőben $\sqrt{n}$-et, majd egyszerűsítsünk vele.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+5}{\sqrt{3n+4}+\sqrt{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(\frac{n}{\sqrt{n}}+\frac{5}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{3+\frac{4}{n}}+\sqrt{2-\frac{1}{n}}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{\sqrt{n}}+\frac{5}{\sqrt{n}}}{\sqrt{3+\frac{4}{n}}+\sqrt{2-\frac{1}{n}}}$$

Mivel $n = (\sqrt{n})^2$ ezért a $\dfrac{n}{\sqrt{n}}$ átalakítható.

$\dfrac{n}{\sqrt{n}} = \dfrac{(\sqrt{n})^2}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$

Ezután a határérték az alábbi alakot ölti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n}{\sqrt{n}} + \dfrac{5}{\sqrt{n}}}{\sqrt{3+\dfrac{4}{n}} + \sqrt{2-\dfrac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n} + \dfrac{5}{\sqrt{n}}}{\sqrt{3+\dfrac{4}{n}} + \sqrt{2-\dfrac{1}{n}}}$$

A részletek határértékét vizsgálva azt mondhatjuk, hogy az összes kicsi tört 0-hoz tart, hiszen $\dfrac{\text{véges}}{\infty}$ típusú. A $\sqrt{n}$ pedig végtelenhez tart.

Ebből a határérték:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n} + \dfrac{5}{\sqrt{n}}}{\sqrt{3+\dfrac{4}{n}} + \sqrt{2-\dfrac{1}{n}}} = \frac{\infty + 0}{\sqrt{3+0} + \sqrt{2-0}} = \infty.$$

A sorozat tehát nem konvergens, nincs határértéke.

6. **Feladat:** Határozzuk meg az $a_n = \sqrt{4n^2+3n} - \sqrt{4n^2-5}$ sorozat határértékét, ha létezik.

Megoldás: A határérték nyilván most is $\infty - \infty$ típusú, és gyöktelenítéssel kezdhetünk hozzá a feladat megoldásához.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{4n^2+3n} - \sqrt{4n^2-5}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{4n^2+3n} - \sqrt{4n^2-5})(\sqrt{4n^2+3n} + \sqrt{4n^2-5})}{\sqrt{4n^2+3n} + \sqrt{4n^2-5}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(4n^2+3n) - (4n^2-5)}{\sqrt{4n^2+3n} + \sqrt{4n^2-5}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+5}{\sqrt{4n^2+3n} + \sqrt{4n^2-5}}$$

A gyöktelenítés után $\dfrac{\infty}{\infty}$ típusú törtet kaptunk, így egyszerűsítéssel célszerű próbálkozni. Mivel a nevezőben a gyök alatt n^2 is előfordul, ezért most $\sqrt{n^2} = n$ emelhető ki, és utána ezzel egyszerűsíthetünk.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+5}{\sqrt{4n^2+3n} + \sqrt{4n^2-5}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(3+\dfrac{5}{n}\right)}{n\left(\sqrt{4+\dfrac{3}{n}} + \sqrt{4-\dfrac{5}{n^2}}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3+\dfrac{5}{n}}{\sqrt{4+\dfrac{3}{n}} + \sqrt{4-\dfrac{5}{n^2}}}$$

A kifejezésben szereplő összes kicsi tört 0-hoz tart, mert mindegyik $\dfrac{\text{véges}}{\infty}$ típusú. Ebből következően a határérték az alábbi:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3+\dfrac{5}{n}}{\sqrt{4+\dfrac{3}{n}}+\sqrt{4-\dfrac{5}{n^2}}}=\frac{3+0}{\sqrt{4+0}+\sqrt{4-0}}=\frac{3}{2+2}=\frac{3}{4}.$$

7. **Feladat:** Határozzuk meg az $a_n=\left(\dfrac{3n+4}{3n+2}\right)^{5n-1}$ sorozat határértékét, ha létezik.

Megoldás: Elsőként vizsgáljuk meg az alap és a kitevő határértékét. A kitevő nyilván végtelenhez tart. Az alapot egyszerűsítsük n-nel.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\dfrac{4}{n}}{3+\dfrac{2}{n}}=1$$

Amint látható, 1^∞ típusú a határérték.

Alakítsuk át az alapot úgy, ahogyan azt az alapfeladatoknál tettük ehhez hasonló esetben. Bontsuk fel a számlálót két tagra úgy, hogy az egyik tag a nevező legyen, majd a törtet daraboljuk két törtre, és egyszerűsítsünk.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+4}{3n+2}\right)^{5n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(3n+2)+2}{3n+2}\right)^{5n-1}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{3n+2}+\frac{2}{3n+2}\right)^{5n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{3n+2}\right)^{5n-1}$$

Ha a kitevőben is $3n+2$ állna mint a nevezőben, akkor készen lennénk. Lényegében ilyen esettel találkoztunk az alapfeladatok között. Most jó lenne elérni azt, hogy megjelenjen a kitevőben a $3n+2$. Ez megoldható, ha a kitevőben szorzunk is és osztunk is $3n+2$-vel, azaz bővítjük a kitevőt.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{3n+2}\right)^{5n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{3n+2}\right)^{(5n-1)\cdot\frac{3n+2}{3n+2}}$$

A kitevőben csoportosítsuk át a tényezőket.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{3n+2}\right)^{(3n+2)\cdot\frac{5n-1}{3n+2}}$$

Ha kitevőben szorzat áll, akkor az ismételt hatványozásként is írható.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{3n+2}\right)^{3n+2}\right)^{\frac{5n-1}{3n+2}}$$

Ezután külön vizsgálhatjuk zárójelen belüli hatvány, és a kitevőben álló tört határértékét.

Az alapfeladatoknál ismertetett okból $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{3n+2}\right)^{3n+2}=e^2$.

A kitevő esetében pedig n-nel egyszerűsítve kapjuk a határértéket.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n-1}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}}=\frac{5}{3}$$

Ezután az eredeti határérték a következő:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{3n+2}\right)^{3n+2}\right)^{\frac{5n-1}{3n+2}}=(e^2)^{\frac{5}{3}}=e^{2\cdot\frac{5}{3}}=e^{\frac{10}{3}}.$$

8. **Feladat:** Határozzuk meg az $a_n=\left(\frac{6n-1}{6n+4}\right)^{2n+7}$ sorozat határértékét, ha létezik.

Megoldás: Elsőként vizsgáljuk meg az alap és a kitevő határértékét. A kitevő nyilván végtelenhez tart. Az alapot egyszerűsítsük n-nel.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6n-1}{6n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{6-\frac{1}{n}}{6+\frac{4}{n}}=1$$

Amint látható, a határérték 1^∞ típusú.

Alakítsuk át az alapot úgy, ahogyan azt az előző feladatnál tettük.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n-1}{6n+4}\right)^{2n-7}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(6n+4)-5}{6n+4}\right)^{2n-7}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n+4}{6n+4}-\frac{5}{6n+4}\right)^{2n-7}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{6n+4}\right)^{2n-7}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-5}{6n+4}\right)^{2n-7}$$

Megint az a gondunk, hogy a kitevőben nem ugyanaz áll, mint a nevezőben. Az előző feladat megoldásához hasonlóan bővítsük a kitevőt.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-5}{6n+4}\right)^{2n-7}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-5}{6n+4}\right)^{(2n-7)\cdot\frac{6n+4}{6n+4}}$$

A kitevőben csoportosítsuk át a tényezőket.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-5}{6n+4}\right)^{(6n+4)\cdot\frac{2n-7}{6n+4}}$$

Ha kitevőben szorzat áll, akkor az ismételt hatványozásként is írható.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-5}{6n+4}\right)^{6n+4}\right)^{\frac{2n-7}{6n+4}}$$

Ezután külön vizsgálhatjuk zárójelen belüli hatvány, és a kitevőben álló tört határértékét.

Az alapfeladatoknál ismertetett okból $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-5}{6n+4}\right)^{6n+4}=e^{-5}$.

A kitevő esetében pedig n-nel egyszerűsítve kapjuk a határértéket.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-7}{6n+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{7}{n}}{6+\frac{4}{n}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Ezután az eredeti határérték a következő:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{-5}{6n+4}\right)^{6n+4} \right)^{\frac{2n-7}{6n+4}} = \left(e^{-5}\right)^{\frac{1}{3}} = e^{(-5)\cdot\frac{1}{3}} = e^{-\frac{5}{3}}.$$

5. Függvények határértéke, folytonossága

5.1. Alapfeladatok

1. **Feladat:** Határozzuk meg az $f(x) = \dfrac{2x^3 - 4x}{5x^3 + 9}$ függvény határértékét a végtelenben és a mínusz végtelenben!

   Megoldás: Vizsgáljuk először végtelenben a határértéket. Nyilvánvaló, hogy a számláló is és a nevező is végetelenhez tart, így $\dfrac{\infty}{\infty}$ típusú a határérték. Úgyanúgy járhatunk el, mint a sorozatok esetében, tehát egyszerűsítjük a törtet a nevező leggyorsabban végtelenhez tartó részével. Ez jelen esetben az x^3.

   $$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 4x}{5x^3 + 9} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 - \dfrac{4}{x^2}}{5 + \dfrac{9}{x^3}}$$

   A $\dfrac{4}{x^2}$ és a $\dfrac{9}{x^3}$ mindegyike 0-hoz tart, hiszen $\dfrac{\text{véges}}{\infty}$ típusúak.
   Ennek következtében az eredeti határérték:

   $$\lim_{x\to\infty} \frac{2 - \dfrac{4}{x^2}}{5 + \dfrac{9}{x^3}} = \frac{2-0}{5+0} = \frac{2}{5}$$

   Kérdés ezután, hogy mennyit változik a helyzet, ha nem végtelenben, hanem mínusz végtelenben vizsgáljuk a határértéket. Ekkor a számláló és a nevező nyilván mínusz végtelenhez tartanak, hiszen a x negatív, akkor x^3 is negatív. A határérték tehát most $\dfrac{-\infty}{-\infty}$ típusú. Ez azonban a megoldás további lépésit nem befolyásolja. Ugyanazt az egyszerűsítést hajthatjuk végre, mint az előbb, s utána ugyanazok a részek fognak 0-hoz tartani. Ennek következtében ugyanazt a határértéket kapjuk a mínusz végtelenben is.

   $$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3 - 4x}{5x^3 + 9} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2 - \dfrac{4}{x^2}}{5 + \dfrac{9}{x^3}} = \frac{2-0}{5+0} = \frac{2}{5}$$

   Ennek a függvénynek tehát a végtelenben és a mínusz végtelenben ugyanaz a szám a határértéke.

2. **Feladat:** Határozzuk meg az $f(x) = \dfrac{5x + 6}{2x^2 + 3x}$ függvény határértékét a végtelenben és a mínusz végtelenben!

   Megoldás: Ha $x \longrightarrow \infty$, akkor nyilván $\dfrac{\infty}{\infty}$ típusú a határérték. Most egyszerűsítsünk x^2-tel.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x-6}{2x^2+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{x}-\frac{6}{x^2}}{2+\frac{3}{x}}$$

Most három részlet is 0-hoz tart, az $\frac{5}{x}$, a $\frac{6}{x^2}$ és a $\frac{3}{x}$. Ebből következően a függvény határértéke:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{x}-\frac{6}{x^2}}{2+\frac{3}{x}}=\frac{0-0}{2+0}=0$$

Ha mínusz végtelenben vizsgáljuk a függvényt, akkor csak annyi a változás, hogy a határérték $\frac{-\infty}{\infty}$ típusú. (A számlálóban x mínusz végtelenhez tart, de mivel a nevezőben x^2 áll, így az végtelenhez tart.) A megoldás egyébként ugyanúgy történik, tehát az alábbiakat írhatjuk:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-6}{2x^2+3x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{5}{x}-\frac{6}{x^2}}{2+\frac{3}{x}}=\frac{0-0}{2+0}=0$$

Ennek a függvénynek is megegyezik a végtelenben és a mínusz végtelenben a határértéke.

3. **Feladat:** Határozzuk meg az $f(x)=\frac{3x^2+9}{4x+7}$ függvény határértékét a végtelenben és a mínusz végtelenben!

Megoldás: Ha végtelenben vizsgáljuk a függvényt, akkor nyilván $\frac{\infty}{\infty}$ típusú a határérték. Most x-szel célszerű egyszerűsíteni.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+9}{4x+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+\frac{9}{x}}{4+\frac{7}{x}}$$

A számlálóban álló $\frac{9}{x}$, és nevezőben levő $\frac{7}{x}$ a 0-hoz tart. A számlálóban a $3x$ végtelenhez tart. Ebből következően a függvény határértéke:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+\frac{9}{x}}{4+\frac{7}{x}}=\frac{\infty+0}{4+0}=\infty$$

A függvénynek tehát nincs határértéke a végtelenben.

A mínusz végtelenben vizsgálva a függvényt $\frac{\infty}{-\infty}$ típusú a határérték. Ez a megoldás lépéseit nem befolyásolja, tehát egyszerűsítünk x-szel.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+9}{4x+7}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+\frac{9}{x}}{4+\frac{7}{x}}$$

A számlálóban álló $\frac{9}{x}$, és nevezőben levő $\frac{7}{x}$ most is a 0-hoz tart. Viszont a számlálóban a $3x$ most a mínusz végtelenhez tart. Ebből következően a határérték:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+\frac{9}{x}}{4+\frac{7}{x}}=\frac{-\infty+0}{4+0}=-\infty$$

A függvénynek tehát mínusz végtelenben sincs határértéke.

Ennek a a függvénynek nincs határértéke sem a végtelenben, sem a mínusz végtelenben, és nem azonos módon divergens a két helyen.

4. **Feladat:** Határozzuk meg az $f(x)=\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-1}$ függvény határértékét a végtelenben.

   Megoldás: A határérték nyilvánvalóan $\infty-\infty$ típusú. Hasonló feladatokkal már találkoztunk a sorozatoknál. Járjunk el ugyanúgy, mint ott, azaz gyöktelenítsünk.

   $$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-1})=$$

   $$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-1})(\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-1})}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-1}}=$$

   $$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+3)-(2x-1)}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-1}}$$

   A számlálóban már csak egy konstans áll, míg a nevező a végtelenhez tart, tehát $\frac{\text{véges}}{\infty}$ típusú a határérték. Ennek következtében:

   $$\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-1}}=0$$

   Megjegyzés: Ennek a függvénynek a határértékéről nincs értelme beszélni a mínusz végtelenben, hiszen a függvény nincs értelmezve a mínusz végtelen 'környezetében'.

5. **Feladat:** Határozzuk meg az $f(x)=\left(\frac{x-2}{x}\right)^x$ függvény határértékét a végtelenben és a mínusz végtelenben.

   Megoldás: Vizsgáljuk először végtelenben a függvényt. Sorozatoknál találkoztunk hasonló feladattal, s ahogyan ott tettük, úgy most is belátható, hogy 1^∞ típusú a határérték. Alakítsuk át a hatvány alapjában levő törtet. Bontsuk két tört összegére, s az első törtet egyszerűsítsük.

   $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x}-\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x}\right)^x$$

   Mivel tudjuk, hogy $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k$, ezért már készen is vagyunk, hiszen most csak annyi a különbség, hogy k szerepét a -2 tölti be. Ennek következtében:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x}\right)^x = e^{-2}$$

A kérdés ezután, mi változik, ha nem végtelenben, hanem mínusz végtelenben vizsgáljuk a függvényt. Ekkor a határérték típusa $1^{-\infty}$. Ez is kritikus, akárcsak az 1^{∞}. Az átalakítás lépései azonasak azzal, amikor végtelenben vizsgáljuk a határértéket.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x}-\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x =$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{-2}{x}\right)^x$$

Az is igaz, hogy $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x = e^k$. Ennek következtében:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{-2}{x}\right)^x = e^{-2}$$

Ennek a függvénynek tehát a végtelenben és a mínusz végtelenben azonos a határértéke.

6. **Feladat:** Határozzuk meg az $f(x) = \dfrac{x^2+4x+3}{(x-1)^2}$ függvény határértékét $x \longrightarrow 2$ és $x \longrightarrow 1$ esetén!

Megoldás: A függvénynek most nem valamelyik végtelenben kell meghatároznunk a határértékét, hanem véges helyen. Ilyenkor, ha az adott hely eleme az értelmezési tartománynak, és a függvényt folytonos függvényekből állítottuk elő műveletekkel, akkor egyszerűen csak be kell helyettesítenünk a függvénybe. Ennek következtében:

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+4x+3}{(x-1)^2} = \frac{2^2+4\cdot2+3}{(2-1)^2} = \frac{15}{1} = 15.$$

Érdekesebb a helyzet, amikor $x \longrightarrow 1$. Az 1 nem eleme a függvény értelmezési tartományának, hiszen a nevezőben ekor 0 állna. Ez azt jelenti, hogy a nevezőnek létezik határértéke ha $x \longrightarrow 1$, és az 0. Ugyanez másképp írva:

$$\lim_{x\to1}(x-1)^2 = (1-1)^2 = 0.$$

A számlálónak is létezik határértéke, és azt megint egyszerű behelyettesítéssel kapjuk.

$$\lim_{x\to1}(x^2+4x+3) = 1^2+4\cdot1+3 = 8$$

Olyan tört határértéke tehát a kérdés, amelynek számlálója egy nem zérus számhoz, nevezője pedig 0-hoz tart.

Ezt úgy is mondhatjuk, hogy a határérték típusa $\dfrac{\text{véges} \neq 0}{0}$.

Gondoljunk bele, ha egy véges értéket, mely nem zérus, 0-hoz egyre közelebbi értékkel osztunk, akkor a tört abszolút értéke egyre nagyobb lesz, s ez azt jelenti, hogy valamelyik végtelenhez tart ekkor a függvény. Fontos szerep jut ilyenkor az előjeleknek, mert azok döntik el, hogy melyik végtelenhez tart a függvény. A számláló pozitív értékhez tart, tehát annak előjele $+$. A nevező is biztosan pozitívan közeledik a 0-hoz, hiszen ott valaminek a négyzete áll. Ezt úgy is mondhatnánk, hogy ha x közel van az 1-hez, akkor a nevező közel van a 0-hoz, és pozitív értéket vesz fel. Mivel mind a számláló, mind a nevező pozitív, így a tört is pozitív, ezért a határérték a $+\infty$ lesz. (A pozitív előjelet csak azért tettük ki, hogy jobban hangsúlyozzuk, melyik végtelenről van szó.) Másképp ezt úgy is írhatjuk, hogy

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x+3}{(x-1)^2}=\infty$, mert a határérték $\dfrac{+\text{véges}}{+0}$ típusú. Itt a $+0$ jelöli azt, hogy a nevező pozitívan közeledik a 0-hoz.

7. **Feladat:** Határozzuk meg az $f(x)=\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-1}$ függvény határértékét az $x_0=1$ helyen balról és jobbról!

Megoldás: Az $x_0=1$ helyen nem értelmezhető a függvény, mert ott a nevező zérus lenne. A nevező tehát itt 0-hoz tart.

$\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)=1^2-1=0$

Így a határérték egyszerű behelyettesítéssel nem kapható meg.

A számláló határértéke a következő:

$\lim\limits_{x\to 1}(x^2+4x+3)=1^2+4\cdot 1+3=8.$

A határérték típusa tehát olyan, mint az előző feladatban, azaz $\dfrac{\text{véges}\neq 0}{0}$.

Abban van a különbség, hogy most a nevező előjele nem egyértelműen pozitív, mint az előbb. Ezért is kell külön vizsgálnunk balról és jobbról a függvényt.

Ha x balról tart 1-hez, azaz $x<1$, akkor $x^2-1<0$, tehát a nevező negatív. Ekkor a határérték $\dfrac{+\text{véges}}{-0}$ típusú, így a határérték $-\infty$ lesz. Jelölésben:

$\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-1}=-\infty.$

Ha x jobbról tart 1-hez, azaz $x>1$, akkor $x^2-1>0$, tehát a nevező pozitív. Ekkor a határérték $\dfrac{+\text{véges}}{+0}$ típusú, így a határérték $+\infty$ lesz. Jelölésben:

$\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-1}=+\infty.$

Enek a függvénynek az $x_0=1$ helyen balról és jobbról sincs határértéke, s a két oldalon nem ugyanúgy divergens.

8. **Feladat:** Határozzuk meg az $f(x) = \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-1}$ függvény határértékét az $x_0 = 1$ helyen balról és jobbról!

Megoldás: Az $x_0 = 1$ helyen nem értelmezhető a függvény. A nevező határértéke itt:

$\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1) = 1^2 - 1 = 0.$

A számláló határértéke:

$\lim\limits_{x\to 1}(x^2-4x+3) = 1^2 - 4\cdot 1 + 3 = 0$

Jelen esetben egy $\dfrac{0}{0}$ típusú határértékünk van. Ez kritikus típus. Át kell alakítanunk a törtet a határérték meghatározásához.

Az eddigiekben kiderült, hogy a számlálóban és nevezőben álló polinomnak is zérushelye az 1. Ez azt jelenti, mindkettő szorzattá bontható úgy, hogy a szorzat egyik tényezője $x-1$. A szorzatok másik tényezője ezután már könnyen meghatározható.

A számláló: $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$.

A nevező: $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$.

Írjuk be ezeket a törtbe.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4x+3}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)}$$

Egyszerűsítsük a törtet.

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x+1}$$

Ebbe a törtbe már behelyettesíthető az 1, így megkapjuk a határértéket.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x+1} = \frac{1-3}{1+1} = \frac{-2}{2} = -1$$

9. **Feladat:** Határozzuk meg a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{5x}$ határértéket!

Megoldás: Behelyettesítéssel vizsgáljuk meg, hova tart a számláló és a nevező.

$\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg}(3\cdot 0) = \operatorname{tg} 0 = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} 5x = 5\cdot 0 = 0$

Mindkettő 0-hoz tart, így $\dfrac{0}{0}$ típusú a határérték. Alakítsuk át a függvényt.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 3x}{5x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{\cos 3x}}{5x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 3x}\cdot\frac{\sin 3x}{5x}$$

Mivel $\lim\limits_{x\to 0}\cos 3x = \cos(3\cdot 0) = \cos 0 = 1$, ezért az első tört határértéke behelyettesítéssel meghatározható. Ezután elég a második törttel foglalkoznunk.

Tudjuk, hogy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

A második tört ehhez hasonlóvá alakítható, csak azt kell elérnünk, hogy a nevezőben ne $5x$, hanem $3x$ álljon. Ezt könnyen elérhetjük, ha 3-mal bővítünk, majd átcsoportosítjuk a tényezőket.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 3x}\cdot\frac{\sin 3x}{5x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 3x}\cdot\frac{\sin 3x}{5x}\cdot\frac{3}{3} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 3x}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3}{5}$$

A $\dfrac{3}{5}$ kiemelhető, a szorzat határértékét pedig a tényezők határértékeinek szorzataként kapjuk.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 3x}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3}{5} = \frac{3}{5}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}$$

Amint korábban már említettük, az első tényező határértékét egyszerű behelyettesítésel kapjuk.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 3x} = \frac{1}{\cos(3\cdot 0)} = 1$$

A második tényező lényegében megegyezik a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ határértékkel, csak az x szerepét a $3x$ vette át. Mindez könnyen leírható, ha bevezetjük a $t = 3x$ új változót. Ha $x \longrightarrow 0$, akkor nyilván $t \longrightarrow 3\cdot 0 = 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1.$$

Ezek alapján az eredeti határérték:

$$\frac{3}{5}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} = \frac{3}{5}\cdot 1\cdot 1 = \frac{3}{5}$$

10. **Feladat:** Határozzuk meg a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{7x}$ határértéket!

Megoldás: Vizsgáljuk meg külön a számláló és a nevező határértékét.

$$\lim_{x\to 0}(e^{4x}-1) = e^{4\cdot 0}-1 = e^0-1 = 1-1 = 0$$

$$\lim_{x\to 0}7x = 7\cdot 0 = 0$$

A határérték tehát $\dfrac{0}{0}$ típusú.

Tudjuk, hogy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$.

Célszerű lenne ehhez hasonlóvá alakítani a határértékünket. Az lenne jó, ha a nevőben nem $7x$ állna, hanem $4x$. Az előző feladat megoldásához hasonlóan, most is bővítsünk, majd csoportosítsuk át a tényezőket.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{7x}\cdot\frac{4}{4}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{4x}\cdot\frac{4}{7}$$

A konstans szorzót emeljük ki.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{4x}\cdot\frac{4}{7}=\frac{4}{7}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{4x}$$

A határérték ezután lényegében megegyezik a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x}$ határértékkel, csak x szerepét a $4x$ vette át. Vezessük be a $t=4x$ új változót. Ha $x\longrightarrow 0$, akkor $t\longrightarrow 4\cdot 0=0$.

$$\frac{4}{7}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{4x}=\frac{4}{7}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{e^{t}-1}{t}=\frac{4}{7}\cdot 1=\frac{4}{7}$$

11. **Feladat:** Folytonos-e az alábbi függvény? $f(x)=\begin{cases} x^2+3, & \text{ha} \quad x\geq 1 \\ 4^x, & \text{ha} \quad x<1 \end{cases}$

Megoldás: A függvényt csak azon a helyen kell vizsgálni, ahol megváltozik a hozzárendelés szabálya, azaz $a=1$-ben. Ezen kívül biztosan folytonos a függvény, mert folytonos függvények szerepelnek a hozzárendelési szabályban. Akkor lesz folytonos az $a=1$ helyen a függvény, ha itt létezik jobb és bal oldali határértéke, ezek megegyeznek, és egyenlők a függvény ezen helyen vett helyettesítési értékével.

Határozzuk meg ezt a három értéket. Kezdjük a függvény helyettesítési értékével.

$f(1)=1^2+3=4$

Határozzuk meg a bal oldali határértéket. Csak be kell helyettesítenünk a megfelelő hozzárendelésbe.

$$\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1-0}(x^2+3)=1^2+3=4$$

Ezután nézzük a jobb oldali határértéket. Most is csak be kell helyettesítenünk, de természetesen a másik hozzárendelésbe.

$$\lim_{x\to 1+0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}4^x=4^1=4$$

Amint látható, megegyezik a három érték, így a függvény folytonos.

12. **Feladat:** Folytonos-e az alábbi függvény? $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{ha} \quad x<2 \\ \dfrac{6}{x}, & \text{ha} \quad x\geq 2 \end{cases}$

Megoldás: Az előző feladathoz hasonlóan, csak azon a helyen kell vizsgálnunk a függvényt, ahol változik a hozzárendelés szabálya, tehát az $a=2$ helyen. Határozzuk meg itt a függvény értékét, valamint bal és jobb oldali határértékét.

A helyettesítési érték az $a=2$ helyen:

$f(2)=\dfrac{6}{2}=3.$

A bal oldali határérték:

$\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2-0} (x^2+1) = 2^2+1 = 5$

Már ezen két érték nem egyezik meg, tehát a függvény nem folytonos az $a = 2$ helyen.

Bár a kérdésre már válaszoltunk, mégis határozzuk meg a jobb oldali határértéket is.

$\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+0} \frac{6}{x} = \frac{6}{2} = 3$

Látható, hogy a helyettesítési érték és a jobb oldali határérték megegyezik. A függvény tehát jobbról folytonos az $a = 2$ helyen is, csak balról nem folytonos itt.

5.2. Összetett feladatok

1. **Feladat:** Határozzuk meg az $f(x) = \frac{x^2-8x+15}{x^2-6x+9}$ függvény határértékeit az értelmezési tartomány 'szélein'!

Megoldás: Határrozzuk meg először az értelmezési tartományt. Egyetlen kikötést kell tennünk, a nevező nem lehet zérus. Célszerű átalakítani a tört nevezőjét, mert felismerhető, hogy egy elsőfokú kifejezés négyete.

$f(x) = \frac{x^2-8x+15}{x^2-6x+9} = f(x) = \frac{x^2-8x+15}{(x-3)^2}$

Ezután tegyük meg a kikötést.

$(x-3)^2 \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x-3 \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \neq 3$

$D_f = I\!R \setminus \{3\} = (-\infty, 3) \bigcup (3, \infty)$

Az értelmezési tartománynak tehát a plussz és mínusz végtelenben van széle, valamint a 3-nál. A 3-hoz azonban két irányból is lehet közeledni, balról illetve jobbról, így itt két határértéket kell meghatároznunk. Ez összesen négy határérték lesz. Vizsgáljuk először a $\pm\infty$-ben a függvényt. A határérték típusa mindkét esetben $\frac{\infty}{\infty}$, így x^2-tel célszerű egyszerűsíteni, mert az nő leggyorsabban.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-8x+15}{x^2-6x+9} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\frac{8}{x}+\frac{15}{x^2}}{1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}} = \frac{1-0+0}{1-0+0} = 1$$

A függvény tehát mind a plussz, mind a mínusz végtelenben 1-hez tart.

Ezután vizsgáljuk 3-ban balról a függvényt.

A számláló határértéke: $\lim\limits_{x\to 3-0} (x^2-8x+15) = 3^2-8\cdot 3+15 = 0$

A nevező határértéke: $\lim\limits_{x\to 3-0} (x^2-6x+9) = 3^2-6\cdot 3+9 = 0$

A határérték tehát $\frac{0}{0}$ típusú. Most a számlálót és a nevezőt szorzattá kell bontanunk. Ez a nevezőben már meg is történt, amikor elsőfokú kifjezés négyzeteként írtuk fel. Mivel a számlálónak is zérushelye a 3, ezért a számlálóban is $x-3$ lesz az egyik tényező. A másik tényező ezután már egyértelmű.

$x^2-8x+15=(x-3)(x-5)$

Írjuk be a szorzattá bontott alakokat, és egyszerűsítsünk.

$$\lim_{x\to 3-0}\frac{x^2-8x+15}{x^2-6x+9}=\lim_{x\to 3-0}\frac{(x-3)(x-5)}{(x-3)^2}=\lim_{x\to 3-0}\frac{x-5}{x-3}$$

Most vizsgáljuk meg újra a határérték típusát.

A számláló határértéke: $\lim\limits_{x\to 3-0}(x-5)=3-5=-2$

A nevező határértéke: $\lim\limits_{x\to 3-0}(x-3)=(3-0)-3=-0$

A határérték tehát $\frac{\text{véges}\neq 0}{0}$ típusú. A függvény ilyen esetben valamelyik végtelenhez tart, a számláló és a nevező elejele dönti el, hogy melyik végtelenhez. Mivel most mindkettő negatív, így a tört pozitív, azaz $+\infty$-hez tart balról a függvény.

$$\lim_{x\to 3-0}\frac{x-5}{x-3}=+\infty$$

Ha jobbról vizsgáljuk a függvényt a 3-ban, akkor ugyanígy alakítjuk át.

$$\lim_{x\to 3+0}\frac{x^2-8x+15}{x^2-6x+9}=\lim_{x\to 3+0}\frac{x-5}{x-3}$$

A számláló határértéke nyilván ekkor is -2. Abban van különbség, hogy más ekkor a nevező előjele.

A nevező határértéke: $\lim\limits_{x\to 3+0}(x-3)=(3+0)-3=+0$

Mivel most negatívat pozitívval osztunk, így a tört negatív lesz, s ebből következően $-\infty$ erről az oldalról a határérték.

$$\lim_{x\to 3+0}\frac{x-5}{x-3}=-\infty$$

A függvény tehát a 3 helyen egyik oldalról $+\infty$-hez, másik oldalról pedig $-\infty$-hez tart, azaz nincs határértéke ezen a helyen. Még csak azt sem mondhatjuk, hogy $+\infty$-hez, vagy $-\infty$-hez tart ezen a helyen, hiszen a két oldalon nem ugyanahhoz a végtelenehez tart

2. **Feladat:** Határozzuk meg az $f(x)=e^{1/x}$ függvény határértékeit az értelmezési tartomány 'szélein'!

Megoldás: Kezdjük az értelmezési tartomány meghatározásával. Mivel a kitevőben egy tört áll, ki kell kötnünk, hogy a nevező nem zérus, azaz $x\neq 0$.

$D_f = I\!R \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \bigcup (0, \infty)$

Az értelmezési tartománynak tehát a plussz és mínusz végtelenben van széle, valamint a 0-nál. A 0-hoz két irányból is lehet közeledni, balról illetve jobbról, így itt két határértéket kell meghatároznunk. Összesen tehát ismét négy határérték a kérdés. Vizsgáljuk először a $\pm\infty$-ben a függvényt. Mivel egy összetett függvény határértéke a kérdés, ezért úgy járhatunk el, hogy először meghatározzuk a belső függvény határértékét, majd a külső függvény határértékét azon a helyen, ahova a belső függvény tart. Nézzük tehát a belső függvény határértékét.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$

Ezután következhet a külső függvény. Vezessük be a $t = \frac{1}{x}$ új változót. Ha $x \longrightarrow \pm\infty$, akkor nyilván $t \longrightarrow 0$. Ennek következtében:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{1/x} = \lim\limits_{t \to 0} e^t.$

Ezt a határétéket pedig egyszerű behelyettesítéssel kapjuk.

$\lim\limits_{t \to 0} e^t = e^0 = 1$

Ezután vizsgáljuk a függvényt 0-nál balról.

A belső függvény határértéke, $\lim\limits_{x \to -0} \frac{1}{x} = -\infty$, hiszen egy $\frac{\text{véges} \neq 0}{0}$ típusú határértékről van szó, ahol a számláló pozitív, a nevező pedig negatív.

Legyen ismét $t = \frac{1}{x}$. Ha $x \longrightarrow -0$, akkor nyilván $t \longrightarrow -\infty$. Ebből következően:

$\lim\limits_{x \to -0} e^{1/x} = \lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0.$

Ez a határérték az exponánciális függvény grafikonjáról leolvasható.

Végül vizsgáljuk a függvényt 0-nál jobbról.

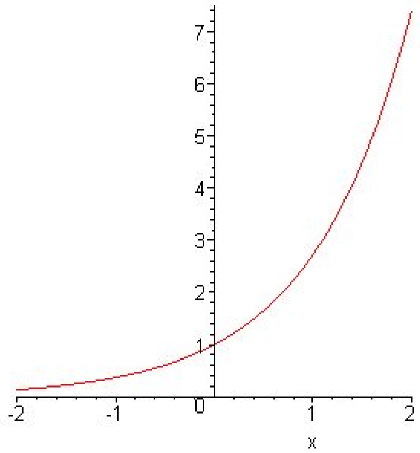
A belső függvény határértéke, $\lim\limits_{x \to +0} \frac{1}{x} = +\infty$, hiszen egy $\frac{\text{véges} \neq 0}{0}$ típusú határértékről van szó, ahol a számláló is pozitív, és a nevező is pozitív.

Legyen most is $t = \frac{1}{x}$. Ha $x \longrightarrow +0$, akkor nyilván $t \longrightarrow +\infty$. Ebből következően:

$\lim\limits_{x \to +0} e^{1/x} = \lim\limits_{t \to +\infty} e^t = \infty.$

Ez a határérték is leolvasható az exponánciális függvény grafikonjáról.

3. **Feladat:** Határozzuk meg a $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x}{\sqrt{3+2x} - \sqrt{3-2x}}$ határérétéket, ha létezik.



12. ábra. Az $f(x) = e^x$ függvény

Megoldás: Vizsgáljuk meg külön a számláló, és külön a nevező határértékét.

$\lim\limits_{x\to 0} 2x = 2 \cdot 0 = 0$

$\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{3+2x} - \sqrt{3-2x}) = \sqrt{3+2\cdot 0} - \sqrt{3-2\cdot 0} = 0$

Amint látható, mindkettő 0-hoz tart, tehát egy $\frac{0}{0}$ típusú határértékkel van dolgunk.

Mivel a nevezőben két gyökös kifejezés különbségét látjuk, ezért célszerű gyöktelenítéssel próbálkozni.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sqrt{3+2x} - \sqrt{3-2x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x(\sqrt{3+2x} + \sqrt{3-2x})}{(\sqrt{3+2x} - \sqrt{3-2x})(\sqrt{3+2x} + \sqrt{3-2x})} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x(\sqrt{3+2x} + \sqrt{3-2x})}{(3+2x) - (3-2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x(\sqrt{3+2x} + \sqrt{3-2x})}{4x}$$

Ha most újra vizsgálnánk a határérték típusát, akkor az nyilván $\frac{0}{0}$ lenne.

Látható, hogy $2x$-szel tudunk egyszerűsíteni.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x(\sqrt{3+2x} + \sqrt{3-2x})}{4x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3+2x} + \sqrt{3-2x}}{2}$$

Így a nevőben csak egy konstans maradt, tehát nem lehet már kritikus a tört, s ezért a határérték behelyettesítéssel megkapható.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3+2x} + \sqrt{3-2x}}{2} = \frac{\sqrt{3+2\cdot 0} + \sqrt{3-2\cdot 0}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

4. **Feladat:** Határozzuk meg a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 2x}$ határérétéket, ha létezik.

Megoldás: Vizsgáljuk meg külön a számláló, és külön a nevező határértékét.

$\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg} 5\cdot 0 = 0$

$\lim\limits_{x\to 0}\sin 2x = \sin(2\cdot 0) = 0$

Amint látható, mindkettő 0-hoz tart, tehát egy $\dfrac{0}{0}$ típusú határérték a kérdés.

Az alapfeladatok között találkoztunk már hasonlóval. Alakítsuk át a függvényt annak mintájára, mint akkor.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 5x}{\cos 5x}}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 5x}\cdot\frac{\sin 5x}{\sin 2x}$$

Mivel $\lim\limits_{x\to 0}\cos 5x = \cos(5\cdot 0) = \cos 0 = 1$, ezért az első tört határértéke behelyettesítéssel meghatározható. Ezután elég a második törttel foglalkoznunk.

Tudjuk, hogy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

A második törtben a számláló is a nevező is ehhez hasonlóvá alakítható. Mindkét helyen bővítenünk kell, a számlálóban $5x$-szel, a nevezőben pedig $2x$-szel.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 5x}\cdot\frac{\sin 5x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 5x}\cdot\frac{\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x}{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2x}$$

Bontsuk ezt tovább törtek szorzatára, és egyszerűsítsünk.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 5x}\cdot\frac{\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x}{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 5x}\cdot\frac{\frac{\sin 5x}{5x}}{\frac{\sin 2x}{2x}}\cdot\frac{5x}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 5x}\cdot\frac{\frac{\sin 5x}{5x}}{\frac{\sin 2x}{2x}}\cdot\frac{5}{2}$$

Az $\dfrac{5}{2}$ kiemelhető, a szorzat határértékét pedig a tényezők, határértékeinek szorzataként kapjuk. A második tényezőben levő tört esetében pedig külön határozzuk meg a számláló és a nevező határértékét.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 5x}\cdot\frac{\frac{\sin 5x}{5x}}{\frac{\sin 2x}{2x}}\cdot\frac{5}{2} = \frac{5}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 5x}{5x}}{\frac{\sin 2x}{2x}} =$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos 5x} \cdot \frac{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x}}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x}}$$

Amint korábban már említettük, az első tényező határértékét egyszerű behelyettesítésel kapjuk.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos 5x} = \frac{1}{\cos(5 \cdot 0)} = 1$$

A másik két határérték lényegében megegyezik a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ határértékkel, csak az x szerepét a $5x$, illetve $2x$ vette át. Mindez könnyen leírható, ha bevezetjük a $t = 5x$ és $u = 2x$ új változókat. Ha $x \longrightarrow 0$, akkor nyilván $t \longrightarrow 5 \cdot 0 = 0$ és $u \longrightarrow 2 \cdot 0 = 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1.$$

Ezek alapján az eredeti határérték:

$$\frac{5}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos 5x} \cdot \frac{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x}}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x}} = \frac{5}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{1} = \frac{5}{2}$$

5. **Feladat:** Határozzuk meg a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{4x} - 1}{\sin 3x}$ határérétéket, ha létezik.

   Megoldás: Vizsgáljuk meg külön a számláló, és külön a nevező határértékét.

   $$\lim_{x\to 0} (e^{4x} - 1) = e^{4\cdot 0} - 1 = 0$$

   $$\lim_{x\to 0} \sin 3x = \sin(3 \cdot 0) = 0$$

   Amint látható, mindkettő 0-hoz tart, tehát egy $\frac{0}{0}$ típusú határérték a kérdés.

   Korábban már szerepelt két nevezetes határérték, melyekben hasonló részletek fordulnak elő, mint a feladatunkban. Ezen határértékek az alábbiak.

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

   $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

   Próbáljunk meg ezekhez hasonló részeket kialakítani, mert akkor azoknak ismert lesz a határéértéke.

   Nagyon jó lenne, ha az $e^{4x} - 1$ osztva lenne $4x$-szel, hiszen akkor lényegében a második nevezetes határéértéket kapnánk, csak x szerepét a

$4x$ venné át. Elérhetjü, hogy ez megjelenjen, ha a számlálóban osztunk is és szorzunk is $4x$-szel.

Hasonlóan jó lenne, ha a nevezőben a $\sin 3x$ osztva lenne $3x$-szel, mert akkor egy olyan részletünk lenne, mely lényegében az első nevezetes határértékkel egyezne meg, csak x szerepét a $3x$ töltené be. Ezt is elérhetjük, ha a nevezőt osztjuk is és szorozzuk is $3x$-szel.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{4x}-1}{4x}\cdot 4x}{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}$$

Bontsuk fel ezt két tört szorzatára, majd egyszerűsítsük a második törtet.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{4x}-1}{4x}\cdot 4x}{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{4x}-1}{4x}}{\frac{\sin 3x}{3x}}\cdot\frac{4x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{4x}-1}{4x}}{\frac{\sin 3x}{3x}}\cdot\frac{4}{3}$$

A $\frac{4}{3}$ kiemelhető, és külön vehetjük a számláló és a nevező határértékét.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{4x}-1}{4x}}{\frac{\sin 3x}{3x}}\cdot\frac{4}{3}=\frac{4}{3}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{4x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}$$

A számlálóban vezessük be $t=4x$ új változót, ekkor $x\longrightarrow 0$ esetén $t\longrightarrow 0$.

Ebből következően:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{4x}=\lim_{t\to 0}\frac{e^{t}-1}{t}=1$$

Hasonlóan a nevezőben legyen $u=3x$. Ha $x\longrightarrow 0$, akkor $u\longrightarrow 0$.

Ezek után:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1.$$

Felhasználva a részeredményeket:

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{4x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{1}=\frac{4}{3}.$$

6. **Feladat:** Vizsgáljuk meg, hol nem folytonos az alábbi függvény!

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x^3-9x}, & \text{ha} \quad x\in I\!R\setminus\{0,\pm 3\}\\ -\dfrac{1}{3}, & \text{ha} \quad x=-3\\ 0, & \text{ha} \quad x=0\\ 1, & \text{ha} \quad x=3\end{cases}$$

Megoldás: A függvény nyilván folytonos az $\mathbb{R} \setminus \{0, \pm 3\}$ halmazon, hiszen itt hozzárendelési szabálya olyan, hogy folytonos függvényekből állítjuk elő műveletekkel. Elég tehát a 0 és ± 3 helyeken vizsgálni a függvényt. Mindegyik helyen ki kell számolni a helyettesítési értéket, valamint vizsgálni a határértéket balról, illetve jobbról, s ahol nem egyezik meg ez a három érték, ott nem folytonos a függvény. A határértékek meghatározásához célszerű egyszerűsíteni a függvény hozzárendelési szabályában szereplő törtet.

$$\frac{x^2 - 9}{x^3 - 9x} = \frac{x^2 - 9}{x(x^2 - 9)} = \frac{1}{x}$$

Vizsgáljuk a függvényt először az $a = -3$ helyen. Mivel az egyszerűsítés utáni törtbe behelyettesíthető a -3, így itt nem kell külön balról és jobbról is határértéket meghatároznunk, mert a kettő biztosan egyenlő, s ez a függvény határértéke ezen a helyen.

$$\lim_{x \to -3} f(x) = \lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{x^3 - 9x} = \lim_{x \to -3} \frac{1}{x} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$

Ez megegyezik a függyvény értékével ezen a helyen, hisz a függvény meghatározása szerint $f(-3) = -\dfrac{1}{3}$. A függvény tehát folytonos az $a = -3$ helyen.

Nézzük ezután a $b = 3$ helyen a függvényt. Itt sem kell külön venni a két oldalról a határértéket, mert a 3-at is be lehet helyettesíteni az egyszerűsítés után kapott törtbe.

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^3 - 9x} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$$

Ez nem egyezik meg a függvény értékével ezen a helyen, hisz $f(3) = 1$ a függvény meghatározása szerint. A 3 helyen tehát nem folytonos a függvény.

Végül vizsgáljuk a $c = 0$ helyen is a függvényt. A 0-t nem lehet behelyettesíteni az egyszerűsítés utáni törtbe sem, így itt külön kell venni a bal oldali és jobb oldali határértéket.

$$\lim_{x \to -0} f(x) = \lim_{x \to -0} \frac{x^2 - 9}{x^3 - 9x} = \lim_{x \to -0} \frac{1}{x} = -\infty$$

A határérték típusa ugyanis $\dfrac{\text{véges} \neq 0}{0}$, s a számláló pozitív a nevező pedig negatív.

Mivel nincs balról határértéke ezen a helyen a függvénynek, így nem folytonos ezen a helyen.

A kérdésre már válaszoltunk, de érdemes azért meghatározni a jobb oldali határértéket is.

$$\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} \frac{x^2 - 9}{x^3 - 9x} = \lim_{x \to +0} \frac{1}{x} = -\infty$$

A határérték típusa ugyanis $\frac{\text{véges} \neq 0}{0}$, s a számláló is és a nevező is pozitív.

A függvény tehát két helyen nem folytonos, a 0 és a 3 helyeken.

Megjegyzés: A két szakadás között különbség van. A 3 helyen lehetne olyan értéket adni a függvénynek, hogy ott is folytonos legyen, így ezt megszüntethető szakadásnak nevezzük. A 0 helyen azonban bármilyen értéke is lenne a függvénynek, nem lenne folytonos, így ez nem megszüntethető szakadás.

6. A differenciálszámítás alapjai és az érintő

6.1. Alapfeladatok

1. **Feladat:** Határozzuk meg az $f(x) = x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$ függvény deriváltját!

   Megoldás: Deriválás előtt célszerű átalakítani a függvényt. A gyök helyett írjunk törtkitevős hatványt.

   $f(x) = x^2 \cdot \sqrt[3]{x} = x^2 \cdot x^{1/3}$

   Alkítsuk ezt egyetlen hatvánnyá.

   $f(x) = x^2 \cdot x^{1/3} = x^{(2+1/3)} = x^{7/3}$

   Ebből az alakból célszerű deriválni, mert így egy elemi alapfüggvényt kell csak deriválnunk. Tudjuk, hogy hatványfüggvény deriváltja a következő:

   $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$.

   Ennek alapján a feladatban szereplő függvény deriváltja:

   $f'(x) = (x^{7/3})' = \dfrac{7}{3}x^{(7/3-1)} = \dfrac{7}{3}x^{4/3}$.

   Természetesen alkalmazhattuk volna a szorzatra vonatkozó deriválási szabályt is, de úgy hosszabb lenne a megoldás.

2. **Feladat:** Határozzuk meg az $f(x) = \dfrac{2x+5}{\sqrt{x}}$ függvény deriváltját!

   Megoldás: Most is célszerű átalakítani a függvényt a deriválás előtt. A törtet bontsuk fel két tört összegére, majd itt is térjünk át törtkitevős hatványra.

   $f(x) = \dfrac{2x+5}{\sqrt{x}} = \dfrac{2x}{\sqrt{x}} + \dfrac{5}{\sqrt{x}} = \dfrac{2x}{x^{1/2}} + \dfrac{5}{x^{1/2}}$

   A törteket írjuk egyetlen hatványként.

   $f(x) = \dfrac{2x}{x^{1/2}} + \dfrac{5}{x^{1/2}} = 2x^{(1-1/2)} + 5x^{-1/2} = 2x^{1/2} + 5x^{-1/2}$

   Ebből az alakból célszerű deriválni. Az összeget tagonként deriválhatjuk, és a konstans szorzók kiemelhetőek. Így megint hatványfüggvényeket kell csak deriválnunk.

   $f'(x) = \left(2x^{1/2} + 5x^{-1/2}\right)' = 2\left(x^{1/2}\right)' + 5\left(x^{-1/2}\right)' =$

   $= 2\left(\dfrac{1}{2}x^{(1/2-1)}\right) + 5\left(-\dfrac{1}{2}x^{(-1/2-1)}\right) = x^{-1/2} - \dfrac{5}{2}x^{(-3/2)}$

   Természetesen alkalmazhattuk volna a törtekre vonatkozó deriválási szabályt is, de úgy hosszabb lenne a megoldás.

3. **Feladat:** Határozzuk meg az $f(x) = 3^x \cdot \cos x$ függvény deriváltját!

Megoldás: Egy szorzatot kell deriválnunk, s most nem tudjuk elkerülni a szorzatra vonatkozó $(g \cdot h)' = g' \cdot h + g \cdot h'$ szabály alkalmazását. Ebbe kell most behelyettesítenünk.

$f'(x) = (3^x \cdot \cos x)' = (3^x)' \cdot \cos x + 3^x \cdot (\cos x)' =$

$= (3^x \cdot \ln 3) \cdot \cos x + 3^x \cdot (-\sin x) = \ln 3 \cdot 3^x \cdot \cos x - 3^x \cdot \sin x$

A deriváltból kiemelhetünk, így az alábbi lakban is írható.

$f'(x) = 3^x (\ln 3 \cdot \cos x - \sin x)$

4. **Feladat:** Határozzuk meg az $r(\varphi) = \dfrac{\operatorname{tg} \varphi}{\varphi^2}$ függvény deriváltját!

Megoldás: Matematikában a függvényeket sokszor jelöli f, a változót pedig x. Most ez nem így történt, a függvényt r jelöli, a változót pedig φ. Ez azonban a lényegen semmit sem változtat, hogy most egy törtet kell deriválnunk. Mivel nem tudjuk átalakítással kiküszöbölni a törtet, így alkalmaznunk kell a $\left(\dfrac{g}{h}\right)' = \dfrac{g' \cdot h - g \cdot h'}{h^2}$ szabályt. Helyettesítsünk be ebbe.

$$r'(\varphi) = \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\varphi^2}\right)' = \frac{(\operatorname{tg} \varphi)' \cdot \varphi^2 - \operatorname{tg} \varphi \cdot (\varphi^2)'}{(\varphi^2)^2} =$$

$$= \frac{\left(\dfrac{1}{\cos^2 \varphi}\right) \cdot \varphi^2 - \operatorname{tg} \varphi \cdot (2\varphi)}{\varphi^4}$$

Az eredményen most is alkíthatunk. A számlálóban kiemelhetünk, majd utána egyszerűsíteni lehet.

$$r'(\varphi) = \frac{\varphi \left(\dfrac{\varphi}{\cos^2 \varphi} - 2\operatorname{tg} \varphi\right)}{\varphi^4} = \frac{\dfrac{\varphi}{\cos^2 \varphi} - 2\operatorname{tg} \varphi}{\varphi^3}$$

5. **Feladat:** Határozzuk meg az $s(t) = \sin(2t + 1)$ függvény deriváltját!

Megoldás: Most egy összetett függvény deriválása a feladat. Ahhoz, hogy alkalmazhassuk a rájuk vonatkozó,

$(g \circ f)'(x) = (g' \circ f)(x) \cdot f'(x)$

szabályt, először el kell döntenünk, hogy mi a külső, és mi a belső függvény. Erről már korábban volt szó. Jelen esetben a következőt kapjuk:

Külső függvény: $g(t) = \sin t$.

Belső függvény: $f(t) = 2t + 1$.

A szabály alkalmazásához mindkettőnek a deriváltjára szükségünk van.

$g'(t) = (\sin t)' = \cos t$

$f'(t) = (2t + 1)' = 2$

Ezután helyettesítünk a szabályba. Célszerű azonban a szabályt az összetett függvényekre vonatkozó másik jelöléssel felírni. Így a következő:

$(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

Ez a felírás formailag jobban tükrözi azt, ami a feladatok megoldása során történik. Ebbe helyettesítünk.

$s'(t) = (\sin(2t+1))' = (\sin)'(2t+1) \cdot (2t+1)' =$

$= \cos(2t+1) \cdot 2 = 2\cos(2t+1)$

A szabály alkalmazása formálisan azt jelenti, hogy a külső függvény deriváltjában a változó helyére a belső függvényt helyettesítjük, majd ezt még megszorozzuk a belső függvény deriváltjával.

6. **Feladat:** Határozzuk meg az $F(s) = \cos^2(3s)$ függvény deriváltját!

   Megoldás: Most is összetett függvény szerepel, de nem csak két függvényből áll a kompozíció. Az ilyen függvényeket nevezzük többszörösen összetett függvényeknek. Ilyenkor is az előző feladatban szereplő szabályt használhatjuk. A függvényt felbontjuk külső és belső függvényre úgy, hogy a külső függvény ne legyen összetett. Ha a belső még az, nem baj. Ezután alkalmazzuk a szabályt. Amikor szorozni kell a belső függvény deriváltjával, akkor azt újra felbontjuk külső és belső függvényre, és újra használjuk a deriválási szabályt. A külső függvény meghatározásához célszerű egy kicsit más alakban felírni a függvényt.

   $F(s) = \cos^2(3s) = (\cos(3s))^2$

   Ebből az alakból jól látszik, hogy a hozzárendelések sorában a négyzetre emelés az utolsó. Ezért a felbontás a következő:

   Külső függvény: $g(s) = s^2$.

   Belső függvény: $f(s) = \cos(3s)$.

   A külső függvény deriváltja könnyen meghatározható.

   $g'(s) = (s^2)' = 2s$

   Ebből elkezdhetjük felírni az $F(s)$ függvény deriváltját. Vesszük a külső függvény deriváltját, a változó helyére a belső függvényt írjuk, majd szorzunk a belső függvény deriváltjával. A belső függvény deriválását egyelőre csak kijelöljük, s majd később hajtjuk végre azt.

   $F'(s) = (\cos^2(3s))' = 2\cos(3s) \cdot (\cos(3s))'$

   Mivel a belső függvény még összetett, ezért deriválásához felbontjuk külső és belső függvényre.

   Külső függvény: $h(s) = \cos s$.

   Belső függvény: $k(s) = 3s$.

Állítsuk elő ezen két függvény deriváltját.

$h'(s) = (\cos s)' = -\sin s$

$k'(s) = (3s)' = 3$

Ezekből felírhatjuk az $f(s) = \cos(3s)$ függvény deriváltját.

$f'(s) = (\cos(3s))' = -\sin(3s) \cdot (3s)' = -\sin(3s) \cdot 3 = -3\sin(3s)$

Ezzel a részeredménnyel térjünk vissza az eredeti függvény deriváltjához.

$F'(s) = 2\cos(3s) \cdot (\cos(3s))' = 2\cos(3s) \cdot (-3\sin(3s)) =$

$= -6\cos(3s) \cdot \sin(3s)$

A feladatot ezzel megoldottuk. Szeretnénk azonban megjegyezni, hogy a deriváltat nagyon sok esetben lehet, és célszerű alakítani. A későbbiekben a deriváltra azért lesz szükség, mert belőle szeretnénk tovább számolni. Ez annál könnyebben hajtható végre, minél egyszerűbb alakban van a derivált. Jelen esetben például felhasználhatjuk a középiskolából ismert $\sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x$ azonosságot. Ennek felhasználásával a derivált a következő módon alakítható:

$F'(s) = -6\cos(3s) \cdot \sin(3s) = -3(2\cos(3s) \cdot \sin(3s)) =$

$= -3\sin(2 \cdot 3s) = -3\sin(6s).$

7. **Feladat:** Határozzuk meg a $h(y) = \ln(y^3) - \ln^3 y$ függvény deriváltját!

   Megoldás: Az nyilvánvaló, hogy a különbséget tagonként fogjuk deriválni, azaz

   $h'(y) = (\ln(y^3) - \ln^3 y)' = (\ln(y^3))' - (\ln^3 y)'.$

   Ezzel két függvény deriválására bontottuk a feladatot. Mindkettő összetett, így az előző két feladatban alkalmazott szabályt fogjuk használni. Foglalkozzunk most csak az első résszel, azaz $\ln(y^3)$-bel.

   Külső függvény: $g(y) = \ln y$.

   Belső függvény: $f(y) = y^3$.

   Ezek deriváltjai az alábbiak:

   $g'(y) = (\ln y)' = \frac{1}{y}$

   $f'(y) = (y^3)' = 3y^2.$

   Ezekből az első rész deriváltja:

   $(\ln(y^3))' = \frac{1}{y^3} \cdot 3y^2$

   Ezt egyszerűsíthetjük.

   $(\ln(y^3))' = \frac{1}{y^3} \cdot 3y^2 = \frac{3}{y}$

A különbség ezen részét azonban nem csak így deriválhattuk volna. Alakítsuk át deriválás előtt a függvényt, felhasználva a középiskolából ismert $\log_a b^c = c \cdot \log_a b$ azonosságot. Így az alábbi alakot kapjuk.

$\ln(y^3) = 3\ln y$

Így már nem kell összetett függvényt deriválnunk, hanem csak egy elemi függvény konstans szorosát. Deriválás során pedig a konstans szorzó egyszerűen kiemelhető. Ennek alapján:

$(\ln(y^3))' = (3\ln y)' = 3(\ln y)' = 3 \cdot \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{y}$

Természetesen ugyanazt a deriváltat kaptuk. Látható, hogy ha a deriválandó függvény egyszerűbbé alakítható, akkor ezt célszerű megtenni, mert könnyebb a deriválás.

Most térjünk át a különbség másik részének, $\ln^3 y$-nak a deriválására. Célszerűbb a függvényt $\ln^3 y = (\ln y)^3$ alakban írni.

Külső függvény: $k(y) = y^3$

Belső függvény: $l(y) = \ln y$

Ezeknek a deriváltjai:

$k'(y) = (y^3)' = 3y^2$

$l'(y) = (\ln y)' = \dfrac{1}{y}$

Ezek már szerepeltek az előbb, csak akkor fordított szereposztásban.

Ezután a második rész deriváltja a következő:

$(\ln^3 y)' = 3(\ln y)^2 \cdot \dfrac{1}{y} = \dfrac{3(\ln y)^2}{y}$

A két részből állítsuk össze az eredeti függvény deriváltját.

$h'(y) = (\ln(y^3) - \ln^3 y)' = \dfrac{3}{y} - \dfrac{3(\ln y)^2}{y} = \dfrac{3}{y} - \dfrac{3\ln^2 y}{y}$

Ebből kiemelhetünk $\dfrac{3}{y}$-t.

$h'(y) = \dfrac{3}{y} - \dfrac{3\ln^2 y}{y} = \dfrac{3}{y}\left(1 - 3\ln^2 y\right)$

A kiemelés később fontos lesz, mert többször kell majd derivált zérushelyét meghatároznunk. Ha a derivált szorzattá alakítható, akkor zérushelyeit könnyebb meghatározni.

8. **Feladat:** Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{x} \cdot \operatorname{arctg}(x^2)$ függvény deriváltját!

   Megoldás: Olyan szorzatot kell deriválnunk, aminek második tényezője összetett. Ebből következően két deriválási szabályt is kell alkalmaznunk, csak az a kérdés, melyiket kell először, s melyiket másodszor.

Általánosságban elmondható, hogy a függvény képzése során későbbi műveletre kell először alkalmaznunk a megfelelő szabályt, s utána arra műveletre, mely a függvény előállítása során az első volt. Ebben a példában nyilván úgy képezzük a függvényt, hogy elsőként elő kell állítani a második tényezőt, azaz végrehajtani az összetételt, majd utána végezzük el a szorzást. Az összetétel tehát az első, s a szorzás a második művelet a sorban. A deriválás során fordítva kell haladnunk, először a szorzásra vonatkozó szabályt használjuk, majd a megfelelő részen az összetételre vonatkozó szabályt. Ennek alapján a következőket írhatjuk:

$f'(x) = (\sqrt{x} \cdot \mathrm{arctg}(x^2))' = (\sqrt{x})' \cdot \mathrm{arctg}(x^2) + \sqrt{x} \cdot (\mathrm{arctg}(x^2))'$

A szabály használata után két helyen szerepel még deriválás. Nézzük az elsőt, azaz $\sqrt{x}$-et. Az első két feladatban szerepelt, hogy a gyököket át kell írni törtkitevős alakra, s abból lehet deriválni.

$\sqrt{x} = x^{1/2}$

Ennek deriváltja:

$(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \dfrac{1}{2}x^{-1/2}$

Ezt gyakran inkább gyökös formában írjuk.

$(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \dfrac{1}{2}x^{-1/2} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Ezután foglalkozzunk a másik olyan részlettel, ahol még deriválni kell, azaz $\mathrm{arctg}(x^2)$-tel. Itt szerepel az összetétel, ezért felbontjuk külső és belső függvényre.

Külső függvény: $g(x) = \mathrm{arctg}(x)$.

Belső függvény: $h(x) = x^2$.

Ezeknek a deriváltjai:

$g'(x) = (\mathrm{arctg}(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$h'(x) = (x^2)' = 2x$

Ezek alapján a második tényező deriváltja:

$(\mathrm{arctg}(x^2))' = \dfrac{1}{1+(x^2)^2} \cdot 2x = \dfrac{2x}{1+x^4}$

Részeredményeinket felhasználva írjuk fel az eredeti függvény deriváltját.

$$f'(x) = (\sqrt{x} \cdot \mathrm{arctg}(x^2))' = (\sqrt{x})' \cdot \mathrm{arctg}(x^2) + \sqrt{x} \cdot (\mathrm{arctg}(x^2))' =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \mathrm{arctg}(x^2) + \sqrt{x} \cdot \frac{2x}{1+x^4}$$

9. **Feladat:** Határozzuk meg az $f(x) = \dfrac{e^{1-2x}}{\sin x}$ függvény deriváltját!

Megoldás: Most egy olyan törtet kell deriválni, aminek a számlálója összetett. Mivel a függvény képzése során először az összetételt kell végrehajtani, majd utána az osztást, ezért a deriválás során először a törtekre vonatkozó szabályt kell alkalmazni, majd után a az összetételre vonatkozót. Írjuk fel tehát elsőként a tört deriválását, s ahol elemi alapfüggvény deriváltja szerepel, ott azt helyettesítsük is be.

$$f'(x) = \frac{\left(e^{1-2x}\right)' \cdot \sin x - e^{1-2x} \cdot (\sin x)'}{(\sin x)^2} = \frac{\left(e^{1-2x}\right)' \cdot \sin x - e^{1-2x} \cdot \cos x}{\sin^2 x}$$

Maradt egy olyan részletünk, ahol még deriválni kell, itt szerepel az összetétel.

Külső függvény: $g(x) = e^x$.

Belső függvény: $h(x) = 1 - 2x$.

Ezek deriváltjai:

$g'(x) = (e^x)' = e^x$

$h'(x) = (1-2x)' = -2$

Ezek felhasználásával írjuk fel az e^{1-2x} deriváltját.

$(e^{1-2x})' = e^{1-2x} \cdot (-2) = -2e^{1-2x}$

Helyettesítsük ezt be, az eredeti függvény deriváltjába.

$$f'(x) = \frac{\left(e^{1-2x}\right)' \cdot \sin x - e^{1-2x} \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{\left(-2e^{1-2x}\right) \cdot \sin x - e^{1-2x} \cdot \cos x}{\sin^2 x}$$

A feladatot megoldottuk, de itt is felhívjuk a figyelmet átalakítási lehetőségre. A számlálóban kiemelési lehetőségünk van.

$$f'(x) = \frac{\left(-2e^{1-2x}\right) \cdot \sin x - e^{1-2x} \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-e^{1-2x}\left(2\sin x + \cos x\right)}{\sin^2 x}$$

10. **Feladat:** Határozzuk meg az $f(x) = \ln\left(\dfrac{4x+5}{3-x}\right)$ függvény deriváltját!

Megoldás: A feladatot kétféle módon is megoldhatjuk. Ha nem alakítjuk át a függvényt, akkor azt látjuk, egy olyan összetett függvényről van szó, melynek belső függvénye egy tört. Elsőként tehát az összetett függvények deriválási szabályát alkalmazzuk, majd utána a belső függvényre a törtek deriválási szabályát.

Külső függvény: $g(x) = \ln x$.

Belső függvény: $h(x) = \dfrac{4x+5}{3-x}$

A külső függvény deriváltja: $g'(x) = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Alkalmazzuk ezután az összetételre a szabályt, a belső függvény deriválását, csak jelöljük ki.

$$f'(x) = \left(\ln\left(\frac{4x+5}{3-x}\right)\right)' = \frac{1}{\frac{4x+5}{3-x}} \cdot \left(\frac{4x+5}{3-x}\right)'$$

Ez nyilván egyszerűbben is írható.

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{4x+5}{3-x}} \cdot \left(\frac{4x+5}{3-x}\right)' = \frac{3-x}{4x+5} \cdot \left(\frac{4x+5}{3-x}\right)'$$

Ezután foglalkozzunk azzal a résszel, ahol még deriválás szerepel. Itt használjuk a törtekre vonatkozó szabályt. A deriválás után rögtön alakítsunk is az eredményen.

$$\left(\frac{4x+5}{3-x}\right)' = \frac{(4x+5)' \cdot (3-x) - (4x+5) \cdot (3-x)'}{(3-x)^2} =$$

$$= \frac{4 \cdot (3-x) - (4x+5) \cdot (-1)}{(3-x)^2} = \frac{12 - 4x + 4x + 5}{(3-x)^2} = \frac{17}{(3-x)^2}$$

Térjünk vissza az eredeti feladatunkhoz ezzel a részeredménnyel. Miután behelyettesítettük, egyszerűsítsünk.

$$f'(x) = \frac{3-x}{4x+5} \cdot \left(\frac{4x+5}{3-x}\right)' = \frac{3-x}{4x+5} \cdot \frac{17}{(3-x)^2} = \frac{17}{(4x+5)(3-x)}$$

Nézzük, hogyan lehetne másképp előállítani a függvény deriváltját. Ekkor deriválás előtt alakítsuk át a függvényt. Használjuk a középiskolából ismert $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ azonosságot. Az alábbit kapjuk:

$$f(x) = \ln\left(\frac{4x+5}{3-x}\right) = \ln(4x+5) - \ln(3-x)$$

Ezzel azt érjük el, hogy egy különbséget kapunk, amiben ugyan mindkét tag összetett, de a belső függvények nem törtek. A két tagot külön deriválhatjuk, és alkalmazzuk rájuk az összetett függvényekre vonatkozó szabályt.

Az első tag, $\ln(4x+5)$ deriválása.

Külső függvény: $g(x) = \ln x$.

Belső függvény: $h(x) = 4x + 5$.

Ezek deriváltaji:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(4x+5)' = 4$$

Ezekből az első tag deriváltja:

$$(\ln(4x+5))' = \frac{1}{4x+5} \cdot 4 = \frac{4}{4x+5}$$

Most következzen a második tag, $\ln(3-x)$ deriválása.

Külső függvény: $g(x) = \ln x$.

Belső függvény: $h(x) = 3 - x$.

Ezek deriváltaji:

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$(3-x)' = -1$

Ezekből a második tag deriváltja:

$(\ln(3-x))' = \dfrac{1}{3-x} \cdot (-1) = \dfrac{-1}{3-x}$

A két részletből rakjuk össze az eredeti feladat megoldását.

$$f'(x) = \left(\ln\left(\frac{4x+5}{3-x}\right)\right)' = \frac{4}{4x+5} - \frac{-1}{3-x} = \frac{4}{4x+5} + \frac{1}{3-x}$$

Ez látszólag különbözik az előző megoldás eredményétől, de ha közös nevezőre hozzuk a két törtet, akkor már láthatóan megegyezik azzal.

$$f'(x) = \frac{4}{4x+5} + \frac{1}{3-x} = \frac{4(3-x)+(4x+5)}{(4x+5)(3-x)} = \frac{12-4x+4x+5}{(4x+5)(3-x)} =$$
$$= \frac{17}{(4x+5)(3-x)}$$

11. **Feladat:** Határozzuk meg az $f(x) = \dfrac{1}{2x-5}$ függvény differenciálhányadosát az $x_0 = 3$ helyen!

Megoldás: Először most is a függvény deriváltját kell előállítanunk, majd a deriváltba behelyettesíteni a megadott x_0 értéket. A deriválás előtt célszerű a függvényt átalakítani, és negatív kitős hatványként felírni.

$$f(x) = \frac{1}{2x-5} = (2x-5)^{-1}$$

Így nem kell majd a törtek deriválási szabályát használnunk, hanem hatványfüggvényt deriválhatunk. Természetesen összetett függvényről van szó, melyben a hatvány a külső függvény. Az összetett függvény deriválásának leírását ezután kicsit rövidítjük.

A külső függvény deriváltja: $(x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2} = \dfrac{-1}{x^2}$.

A belső függvény deriváltja: $(2x-5)' = 2$.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2x-5}\right)' = \frac{-1}{(2x-5)^2} \cdot 2 = \frac{-2}{(2x-5)^2}$$

Ezután helyettesítsük be a megadott x_0 értéket.

$$f'(x_0) = \frac{-2}{(2 \cdot 3 - 5)^2} = -2$$

A függvény differenciálhányadosa az $x_0 = 3$ helyen tehát -2-vel egyenlő.

12. **Feladat:** Határozzuk meg az $f(x) = \operatorname{th}(3x)$ függvény differenciálhányadosát az $x_0 = 0$ helyen!

Megoldás: Elsőként deriváljuk a függvényt, amely összetett.

A külső függvény deriváltja: $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

A belső függvény deriváltja: $(3x)' = 3$.

$f'(x) = (\operatorname{th}(3x))' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(3x)} \cdot 3 = \dfrac{3}{\operatorname{ch}^2(3x)}$

Helyettesítsük be a megadott x_0 értéket.

$f'(x_0) = \dfrac{3}{\operatorname{ch}^2(3 \cdot 0)} = \dfrac{3}{\operatorname{ch}^2 0}$

Ismert, hogy $\operatorname{ch} 0 = 1$. Ezt felhasználva:

$f'(x_0) = \dfrac{3}{\operatorname{ch}^2 0} = \dfrac{3}{1^2} = 3$

A függvény differenciálhányadosa az $x_0 = 0$ helyen tehát 3-mal egyenlő.

13. **Feladat:** Írjuk fel az $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ függvény grafikonjának érintőjét az $x_0 = 4$ helyen!

Megoldás: Tudjuk, hogy függvény garfikonjának érintőjét egy megadott x_0 helyen az $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ egyenlet adja meg. Ahhoz, hogy ebbe behelyettesíthessünk, meg kell határoznunk a függvény x_0 helyen vett értékét, azaz $f(x_0)$-t, és a függvény x_0 helyen vett differenciálhányadosának értékét, azaz $f'(x_0)$-t. Elsőként helyettesítsünk a függvénybe.

$f(x_0) = \dfrac{1}{\sqrt{4}} = \dfrac{1}{2}$

Ezután állítsuk elő a függvény deriváltját. A függvényt ehhez célszerű hatványként írni.

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$

Most következhet a deriválás.

$f'(x) = (x^{-1/2})' = -\dfrac{1}{2} \cdot x^{-3/2} = -\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$

A deriváltba helyettesítsük a megadott x_0 értéket.

$f'(x_0) = -\dfrac{1}{2\sqrt{4^3}} = -\dfrac{1}{16}$

Ezek alapján az érintő egyenlete:

$y = -\dfrac{1}{16}(x - 4) + \dfrac{1}{2}$.

Ennek jobb oldalát célszerű rendezni.

$y = -\frac{1}{16}(x-4) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{16}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{16}x + \frac{3}{4}$

Eredményünk egyben azt is jelenti, hogy az $f(x)$ függvényt az $x_0 = 4$ hely környezetében a $g(x) = -\frac{1}{16}x + \frac{3}{4}$ lineáris függvény közelíti meg a legpontosabban. Ezt a függvényt nevezzük az $f(x)$ függvény x_0-beli linearizáltjának.

14. **Feladat:** Írjuk fel az $f(x) = \ln x$ függvény grafikonjának érintőjét az $x_0 = e$ helyen!

    Megoldás: Járjunk el úgy, mint az előző feladat megoldása során. Elsőként határozzuk meg a függvény értékét az x_0 helyen.

    $f(x_0) = \ln e = 1$

    Ezután deriváljuk a függvényt.

    $f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$

    Határozzuk meg a függvény differeinciálhányadosát az x_0 helyen, azaz helyettesítsük x_0-t a deriváltba.

    $f'(x_0) = \frac{1}{e}$

    Végül helyettesítsünk a az értintőt leíró $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ egyenletbe.

    $y = \frac{1}{e}(x-e) + 1$

    A jobb oldalon rendezzünk.

    $y = \frac{1}{e}(x-e) + 1 = \frac{1}{e} \cdot x - \frac{1}{e} \cdot e + 1 = \frac{1}{e} \cdot x = \frac{x}{e}$

6.2. Összetett feladatok

1. **Feladat:** Határozzuk meg az $f(x) = \mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{arctg}\sqrt{x} + \frac{1}{\cos(e \cdot \pi)}$ függvény deriváltját!

   Megoldás: A függvény képzésében az utolsó művelet az összeadás. A két tagot külön deriválhatjuk, azaz

   $f'(x) = \left(\mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{arctg}\sqrt{x} + \frac{1}{\cos(e \cdot \pi)}\right)' =$

   $= \left(\mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{arctg}\sqrt{x}\right)' + \left(\frac{1}{\cos(e \cdot \pi)}\right)'$

   Ha tüzetesen megnézzük a második tagot, akkor azt látjuk, hogy abban nem szerepel a változó. Az e és a π egy-egy konstans, így szorzatuk is konstans. Ha annak cos-át vesszük, újra csak konstanst kapunk, melynek reciproka is konstans. Konstans tag deriváltja pedig zérus, azaz

$\left(\frac{1}{\cos(e\cdot\pi)}\right)' = 0.$

A második taggal tehát nem kell foglalkoznunk, mert

$f'(x) = \left(\mathrm{sh}^2 x\cdot \mathrm{arctg}\sqrt{x}\right)' + \left(\frac{1}{\cos(e\cdot\pi)}\right)' = \left(\mathrm{sh}^2 x\cdot \mathrm{arctg}\sqrt{x}\right)'$

Amint látható, az első tag egy szorzat. Alkalmazzuk a megfelelő deriválási szabályt.

$f'(x) = \left(\mathrm{sh}^2 x\cdot \mathrm{arctg}\sqrt{x}\right)' = \left(\mathrm{sh}^2 x\right)'\cdot \mathrm{arctg}\sqrt{x} + \mathrm{sh}^2 x\cdot(\mathrm{arctg}\sqrt{x})'$

Két olyan rész maradt, amiben deriválni kell. Nézzük az elsőt, a $\mathrm{sh}^2 x$-et, ami $(\mathrm{sh}\,x)^2$ alakban is írható. Ez egy összetett függvény. Határozzuk meg ennek deriváltját.

A külső függvény deriváltja: $g'(x) = (x^2)' = 2x$.

A belső függvény deriváltja: $h'(x) = (\mathrm{sh}\,x)' = \mathrm{ch}\,x$.

Ezek alapján: $\left((\mathrm{sh}\,x)^2\right)' = 2\mathrm{sh}\,x\cdot \mathrm{ch}\,x$.

Felhasználva a $\mathrm{sh}(2x) = 2\mathrm{sh}\,x\cdot\mathrm{ch}\,x$ azonosságot, ezt egyszerűbben is írhatjuk.

$\left((\mathrm{sh}\,x)^2\right)' = \mathrm{sh}(2x)$

Ezután nézzük a másik olyan részt, ahol még deriválnunk kell, ez az $\mathrm{arctg}\sqrt{x}$. Ez is összetett függvény.

A külső függvény deriváltja: $g'(x) = (\mathrm{arctg}\,x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

A belső függvény deriváltja: $h'(x) = (\sqrt{x})' = \left(x^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}\cdot x^{-1/2} =$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

Ezek alapján: $(\mathrm{arctg}\sqrt{x})' = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\cdot(1+x)}$

A részeredményeket felhasználva írjuk fel az eredeti függvény deriváltját.

$f'(x) = \left(\mathrm{sh}^2 x\right)'\cdot \mathrm{arctg}\sqrt{x} + \mathrm{sh}^2 x\cdot(\mathrm{arctg}\sqrt{x})' =$

$= \mathrm{sh}(2x)\cdot\mathrm{arctg}\sqrt{x} + \mathrm{sh}^2 x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}\cdot(1+x)}$

2. **Feladat:** Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt[3]{\mathrm{ch}(5x+6) + \frac{2^x}{(3x-1)^2}}$ függvény deriváltját.

Megoldás: Az utolsó művelet a függvény képzése során egy összetétel, így erre alkalmazzuk a megfelelő szabályt.

A külső függvény deriváltja: $g'(x) = (\sqrt[3]{x})' = \left(x^{1/3}\right)' = \frac{1}{3} \cdot x^{-2/3} =$
$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Ezt felhasználva az alábbit írhatjuk:

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{\operatorname{ch}(5x+6) + \frac{2^x}{(3x-1)^2}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{(\operatorname{ch}(5x+6) + \frac{2^x}{(3x-1)^2})^2}} \cdot \left(\operatorname{ch}(5x+6) + \frac{2^x}{(3x-1)^2}\right)'$$

A belső függvény deriváltját egyelőre csak kijelöltük, most ennek meghatározása vár még ránk. Ez egy összeg, melynek két tagját külön deriváljuk.

Az első tag, $\operatorname{ch}(5x+6)$ deriválása. Ez egy összetett függvény.

A külső függvény deriváltja: $g'(x) = (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

A belső függvény deriváltja: $h'(x) = (5x+6)' = 5$.

Ezek alapján: $(\operatorname{ch}(5x+6))' = \operatorname{sh}(5x+6) \cdot 5 = 5\operatorname{sh}(5x+6)$

A második tag, $\frac{2^x}{(3x-1)^2}$ deriválása. Ez egy törtfüggvény. Alkalmazzuk a törtek deriválási szabályát.

$$\left(\frac{2^x}{(3x-1)^2}\right)' = \frac{(2^x)' \cdot (3x-1)^2 - 2^x \cdot ((3x-1)^2)'}{((3x-1)^2)^2}$$

Két helyen kell deriválnunk. Az első egyszerű, mert 2^x elemi alapfüggvény.

$(2^x)' = 2^x \cdot \ln 2$

A másik rész, $(3x-1)^2$ érdekesebb, mert összetett.

Külső függvény deriváltja: $(x^2)' = 2x$.

Belső függvény deriváltja: $(3x-1)' = 3$

Ezekből: $\left((3x-1)^2\right)' = 2(3x-1) \cdot 3 = 6(3x-1)$

Most térjünk vissza a törthöz.

$$\left(\frac{2^x}{(3x-1)^2}\right)' = \frac{(2^x)' \cdot (3x-1)^2 - 2^x \cdot ((3x-1)^2)'}{((3x-1)^2)^2} =$$

$$= \frac{(2^x \cdot \ln 2) \cdot (3x-1)^2 - 2^x \cdot (6(3x-1))}{(3x-1)^4} =$$

$$= \frac{2^x \cdot (3x-1)\,(\ln 2 \cdot (3x-1) - 6 \cdot 2^x)}{(3x-1)^4}$$

Ezzel meghatároztuk a belső függvény második tagjának is a deriváltját. Utolsó lépésként térjünk vissza az eredeti függvényhez, és írjuk fel annak deriváltját.

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{\mathrm{ch}(5x+6) + \frac{2^x}{(3x-1)^2}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{(\mathrm{ch}(5x+6) + \frac{2^x}{(3x-1)^2})^2}} \cdot \left(\mathrm{ch}(5x+6) + \frac{2^x}{(3x-1)^2}\right)' =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{(\mathrm{ch}(5x+6) + \frac{2^x}{(3x-1)^2})^2}} \cdot$$

$$\cdot \left(5\mathrm{sh}(5x+6) + \frac{2^x \cdot (3x-1)\left(\ln 2 \cdot (3x-1) - 6 \cdot 2^x\right)}{(3x-1)^4}\right) =$$

$$= \frac{5\mathrm{sh}(5x+6) + \frac{2^x \cdot (3x-1)\left(\ln 2 \cdot (3x-1) - 6 \cdot 2^x\right)}{(3x-1)^4}}{3\sqrt[3]{(\mathrm{ch}(5x+6) + \frac{2^x}{(3x-1)^2})^2}}.$$

3. **Feladat:** Határozzuk meg az $f(x) = x^{\sin x}$ függvény deriváltját!

Megoldás: Egy látszólag nem túl bonyolult függvényt kell deriválnunk, de ebből az alakból mégsem tudjuk végrehajtani a deriválást. Ha ugyanis összetett függvénynek próbáljuk tekinteni a függvényt, akkor nem találunk olyan elemi függvényt, ami betölthetné a külső függvény szerepét. Felvetődik ugyan, hogy ez nem egy hatványfüggvény-e, de azt kell válaszolnunk, hogy nem. A hatványok ugyanis x^n alakúak, tehát a kitevőben ilyenkor konstans áll. A másik ötlet az lehet, hogy ez egy exponenciális függvény. Az exponenciálisok azonban a^x alakúak, ahol az alap egy pozitív konstans. Mivel ebben a függvényben az alap és a kitevő is tartalmazza a változót, így ez se nem hatvány, se nem exponenciális függvény. Ha viszont alakítunk rajta, akkor elérhető, hogy exponenciális legyen. Középiskolából ismert az $a^{\log_a b} = b$ összefüggés. Ezt felhasználva alakítsuk át az alapban álló x-et.

$$f(x) = x^{\sin x} = \left(e^{\ln x}\right)^{\sin x}$$

Ezt tovább is alakíthatjuk, felhasználva az $\left(a^b\right)^c = a^{b \cdot c}$ azonosságot.

$$f(x) = \left(e^{\ln x}\right)^{\sin x} = e^{(\ln x \cdot \sin x)}$$

Ha ebben az alakban írjuk a függvényt, akkor már olyan összetételt látunk, melyben a külső függvény az exponenciális. Írjuk fel ezt most részletesen, ahogyan a korábbi feladatokban is tettük.

Külső függvény: $g(x) = e^x$.

Belső függvény: $h(x) = \ln x \cdot \sin x$.

Ezeknek a deriváltjai:

$g'(x) = (e^x)' = e^x$

$h'(x) = (\ln x \cdot \sin x)' = (\ln x)' \cdot \sin x + \ln x \cdot (\sin x)' = \frac{1}{x} \cdot \sin x + \ln x \cdot \cos x = \frac{\sin x}{x} + \ln x \cdot \cos x$

Ezekből írjuk fel az eredeti függvény deriváltját.

$f'(x) = \left(e^{(\ln x \cdot \sin x)}\right)' = e^{(\ln x \cdot \sin x)} \cdot \left(\frac{\sin x}{x} + \ln x \cdot \cos x\right)$

Ha ezután fordított irányban használjuk azt az átalakítást, amivel az elején függvényt exponenciálissá tettük, akkor ez kicsit rövidebben is írható.

$f'(x) = e^{(\ln x \cdot \sin x)} \cdot \left(\frac{\sin x}{x} + \ln x \cdot \cos x\right) = x^{\sin x} \cdot \left(\frac{\sin x}{x} + \ln x \cdot \cos x\right)$

4. **Feladat:** Határozzuk meg az $f(x) = (\operatorname{th} x)^x$ függvény deriváltját!

   Megoldás: A függvény hasonló, mint az előző feladatban, mind az alapban, mind a kitevőben szerepel a változó. Alakítsuk át hasonlóan a függvényt. Vegyük az alap természetes alapú logaritmusát, és emeljük fel erre az e számot. Az alapban a $\operatorname{th} x$ helyett tehát $e^{\ln(\operatorname{th} x)}$ írható.

   Ebből: $f(x) = (\operatorname{th} x)^x = \left(e^{\ln(\operatorname{th} x)}\right)^x$

   Ez tovább alakítva:

   $f(x) = \left(e^{\ln(\operatorname{th} x)}\right)^x = e^{x \cdot \ln(\operatorname{th} x)}$

   Ebből az alakból már elvégezhető a deriválás.

   Külső függvény: $g(x) = e^x$.

   Belső függvény: $h(x) = x \cdot \ln(\operatorname{th} x)$.

   Ezeknek a deriváltjai:

   $g'(x) = (e^x)' = e^x$

   $h'(x) = 1 \cdot \ln(\operatorname{th} x) + x \cdot \frac{1}{\operatorname{th} x} \cdot \frac{1}{(\operatorname{ch} x)^2} = \ln(\operatorname{th} x) + \frac{x}{\operatorname{th} x \cdot (\operatorname{ch} x)^2}$

   A belső függvény deriválásakor természetesen figyelembe vettük, hogy olyan szorzat melynek második tényezője összetett, de ezt már nem részleteztük.

   Ezután az eredeti függvény deriváltja a következő:

   $f'(x) = \left(e^{x \cdot \ln(\operatorname{th} x)}\right)' = e^{x \cdot \ln(\operatorname{th} x)} \cdot \left(\ln(\operatorname{th} x) + \frac{x}{\operatorname{th} x \cdot (\operatorname{ch} x)^2}\right) =$

   $= (\operatorname{th} x)^x \cdot \left(\ln(\operatorname{th} x) + \frac{x}{\operatorname{th} x \cdot (\operatorname{ch} x)^2}\right)$

5. **Feladat:** Határozza meg, mely pontokban metszi az $f(x) = \dfrac{x-4}{x+1}$ függvény grafikonja a tengelyeket, és írja fel ezekben a pontokban az érintő egyenletét!

Megoldás: Elsőként határozzuk meg, hol metszi a fügvény grafikonja az y tengelyt. Az y tengely pontjaiban $x = 0$, tehát ekkor 0-t kell helyettesítenünk a függvénybe.

$f(0) = \dfrac{0-4}{0+1} = -4$

A függvény grafikonja tehát a $P_1(0, 4)$ pontban metszi az y tengelyt.

Következzen az x tengellyel vett metszéspont. Az x tengely pontjaiban $y = 0$, tehát ekkor olyan pontot kell keresnünk a függvény grafikonján, ahol a függvény értéke 0. Meg kell határoznunk tehát a függvény zérushelyét vagy zérushelyeit, azaz megoldjuk az $f(x) = 0$ egyenletet. Így kapjuk:

$\dfrac{x-4}{x+1} = 0.$

Egy tört csak úgy lehet 0, ha a számlálója 0. Ezzel egyszerűbb egyenletet kapunk, amit már könnyen megoldunk.

$x - 4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 4$

A függvény grafikonja tehát a $P_2(4, 0)$ pontban metszi az x tengelyt.

Ezután írjuk fel az érintőket. Ehhez szükségünk van a függvény deriváltjára.

$$f'(x) = \left(\frac{x-4}{x+1}\right)' = \frac{(x-4)' \cdot (x+1) - (x-4) \cdot (x+1)'}{(x+1)^2} =$$
$$= \frac{1 \cdot (x+1) - (x-4) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2}$$

Az érintők egyenletét az $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ összefüggésből kapjuk.

A $P_1(0, 4)$ pont esetén tudjuk hogy $x_0 = 0$ és $f(x_0) = 4$. Még az $f'(x_0)$ értékét kell meghatároznunk.

$f'(x_0) = \dfrac{5}{(0+1)^2} = 5$

Ezután az érintő egyenlete a $P_1(0, 4)$ pontban:

$y = 5(x - 0) + 4 = 5x + 4.$

Hajtsuk végre ugyanezt a $P_2(4, 0)$ pont esetén is.

$f'(x_0) = \dfrac{5}{(4+1)^2} = \dfrac{1}{5}$

Az érintő egyenlete a $P_2(4, 0)$ pontban:

$y = \dfrac{1}{5}(x - 4) + 0 = \dfrac{1}{5}x - \dfrac{4}{5}.$

6. **Feladat:** Határozza meg az $f(x) = \dfrac{2}{x-3}$ függvény esetén a grafikon azon érintőinek egyenletét, melyek párhuzamosak az $y + 2x - 7 = 0$ egyenletű egyenessel.

Megoldás: Egy érintő felírásához három dolgot kell ismernünk. Az érintési pont két koordinátáját, ezek x_0 és $f(x_0)$, illetve az érintő meredekségét, ami $f'(x_0)$. Ezen három szám közül az egyiket ismernünk kell ahhoz, hogy a másik kettőt meg tudjuk határozni. Jelen esetben a meredekséget adták meg, csak kicsit burkolt formában. Ha ugyanis a keresett érintők párhuzamosak egy megadott egyenessel, akkor meredekségük ugyanaz, mint a megadott egyenesnek. Elsőként tehát az adott egyenes egyenletéből ki kell olvasnunk a meredekségét. Ehhez rendezzük y-ra az egyenletet.

$y = -2x + 7$

Az egyenes meredeksége ekkor az x együtthatója lesz, jelen esetben tehát $m = -2$.

Olyan pontokat kell keresnünk a függvény grafikonján, ahol a függvény differenciálhányadosa éppen a meredekséggel egyenlő. Meg kell tehát oldanunk az $f'(x_0) = m$ egyenletet, s ebből kapjuk meg az érintési pont helyét, azaz x_0-t. Az egyenlet felírásához állítsuk elő a függvény deriváltját.

$f'(x) = \left(\dfrac{2}{x-3}\right)' = 2\left((x-3)^{-1}\right)' = -2(x-3)^{-2} = \dfrac{-2}{(x-3)^2}$

Ezután írjuk fel az egyenletet.

$\dfrac{-2}{(x_0-3)^2} = -2$

Rendezve az alábbit kapjuk:

$(x_0 - 3)^2 = 1$

Mindkét oldalból gyököt vonva:

$|x_0 - 3| = 1$

A megoldás innentől két esetre bomlik. Az első esetben

$x_0 - 3 = 1$, amiből $x_0 = 4$.

Az érintő felírásához még az érintési pont második koordinátájára van szükségünk.

$f(x_0) = \dfrac{2}{4-3} = 2$

Az egyik érintési pont tehát a $P_1(4, 2)$.

Ebben a pontban az érintő egyenelete:

$y = -2(x-4) + 2 = -2x + 10.$

Most nézzük a másik esetet. Ekkor

$x_0 - 3 = -1$, amiből $x_0 = 2$.

Az érintési pont második koordinátája ekkor:

$f(x_0) = \dfrac{2}{2-3} = -2.$

A másik érintési pont tehát $P_2(2, -2)$.

Ezen pontban az érintő egyenlete:

$y = -2(x-2) + (-2) = -2x + 2.$

Foglaljuk össze az eredményt. A függvény grafikonjának 2 pontban párhuzamos az érintője a megadott egyenessel. A $P_1(4, 2)$ pontban, ahol az érintő egyenlete $y = -2x + 10$, és a $P_2(2, -2)$ pontban, ahol az érintő egyenlete $y = -2x + 2$.

7. L'Hospital-szabály

7.1. Alapfeladatok

1. **Feladat:** Határozzuk meg a $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\ln(x-2)}{x^2-9}$ határértéket!

   Megoldás: Amint a korábbi határértékes feladatokban, elsőként most is a határérték típusát kell megvizsgálnunk.

   A számláló hatáértéke: $\lim\limits_{x\to 3} \ln(x-2) = \ln(3-2) = \ln 1 = 0.$

   A nevező határértéke: $\lim\limits_{x\to 3} (x^2-9) = 3^2 - 9 = 0.$

   A határérték tehát $\dfrac{0}{0}$ típusú, azaz kritikus. Teljesülnek a L'Hospital-szabály feltételei, amely azt mondja ki, hogy az eredeti tört határértéke megegyezik azon tört határértékével, melyet a számláló és a nevező deriválásával kapunk. Ez most a következőt jelenti:

   $$\lim_{x\to 3} \frac{\ln(x-2)}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{(\ln(x-2))'}{(x^2-9)'}$$

   Hajtsuk végre a deriválásokat.

   $$\lim_{x\to 3} \frac{\ln(x-2)}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{(\ln(x-2))'}{(x^2-9)'} = \lim_{x\to 3} \frac{\frac{1}{x-2}}{2x}$$

   Ezután a határérték már behelyettesítéssel meghatározható.

   $$\lim_{x\to 3} \frac{\frac{1}{x-2}}{2x} = \lim_{x\to 3} \frac{\frac{1}{3-2}}{2\cdot 3} = \frac{1}{6}$$

   A L'Hospital-szabály szerint ez megegyezik az eredeti tört határértékével, azaz

   $$\lim_{x\to 3} \frac{\ln(x-2)}{x^2-9} = \frac{1}{6}.$$

2. **Feladat:** Határozzuk meg a $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x}$ határértéket!

   Megoldás: Ismét a határérték típusának vizsgálatával kezdjük.

   A számláló határértéke: $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty.$

   A nevező határértéke: $\lim\limits_{x\to\infty} x = \infty.$

   A határérték típusa tehát $\dfrac{\infty}{\infty}$, azaz kritikus. A L Hospital-szabály nem csak a $\dfrac{0}{0}$, hanem a $\dfrac{\infty}{\infty}$ típusú határértékek esetén is alkalmazható. Vegyük tehát a számláló és a nevező deriváltját, s az így keletkező új törtnek ugyanaz lesz a határértéke, mint az eredeti törtnek.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$$

Ez a határérték nyilván 0-val egyenlő, hiszen $\frac{\text{véges}}{\infty}$ típusú. Így az eredeti határérték is 0-val egyenlő, azaz

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0.$$

Megjegyzés: A megoldás elején azért fontos megvizsgálnunk a határérték típusát, mert ezzel ellenőrizzük le, hogy teljesülnek-e a L'Hospital-szabály alkalmazásához a feltételek. Ha a feladatban nem kritikus tört típus, azaz $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ szerepel, akkor a szabály nem alkalmazható.

3. **Feladat:** Határozzuk meg a $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+5x-6}{x^2-1}$ határértéket!

   Megoldás: Vizsgáljuk a határérték típusát.

   A számláló hatáértéke: $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+5x-6)=1^2+5\cdot 1-6=0.$

   A nevező határértéke: $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)=1^2-1=0.$

   A határérték tehát $\frac{0}{0}$ típusú, azaz kritikus. Alkalmazzuk a L'Hospital-szabályt.

   $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+5x-6}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+5x-6)'}{(x^2-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+5}{2x}$$

   Ennek a törtnek a határértéke már behelyettesítéssel meghatározható.

   $$\lim_{x\to 1}\frac{2x+5}{2x}=\lim_{x\to 1}\frac{2\cdot 1+5}{2\cdot 1}=\frac{7}{2}$$

   Ugyanez az eredeti tört határértéke is, azaz

   $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+5x-6}{x^2-1}=\frac{7}{2}.$$

4. **Feladat:** Határozzuk meg a $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{\sqrt{x}}$ határértéket!

   Megoldás: Természetesen a határérték típusát vizsgáljuk elsőként.

   A számláló hatáértéke: $\lim\limits_{x\to\infty}e^x=\infty.$

   A nevező határértéke: $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}=\infty.$

   A határérték tehát $\frac{\infty}{\infty}$ típusú, azaz kritikus. Teljesülnek a feltétetelek a szabály alkalmazásához.

   $$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(e^x)'}{(\sqrt{x})'}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

Mielőtt vizsgálnánk ezen új tört határértékét, célszerű átalakítani.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\left(e^x\cdot\frac{2\sqrt{x}}{1}\right)=2\lim_{x\to\infty}\left(e^x\cdot\sqrt{x}\right)$$

Az átalakítás eredményeként eltűnt a tört, és helyette szorzatot kaptunk. A megoldás elején láttuk, hogy a szorzat mindkét tényezője végtelenhez tart, így a szorzat is a végtelenhez tart, azaz

$$2\lim_{x\to\infty}\left(e^x\cdot\sqrt{x}\right)=\infty.$$

A szabály szerint pedig ugyanezzel egyenlő az eredeti határérték is, tehát

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{\sqrt{x}}=\infty.$$

Ez azt jelenti, a függvénynek nincs határértéke a végtelenben.

5. **Feladat:** Határozzuk meg a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{3x}$ határértéket!

   Megoldás: Vizsgáljuk meg külön a számláló és a nevező határértékét.

   A számláló határértéke: $\lim\limits_{x\to 0}\sin 7x=\sin(7\cdot 0)=0$.

   A nevező határértéke: $\lim\limits_{x\to 0}3x=3\cdot 0=0$.

   A határérték tehát $\dfrac{0}{0}$ típusú, azaz kritikus. Teljesülnek a L'Hospital-szabály feltétetelei. Figyeljünk azonban oda, és a számláló deriválásakor ne feledkezzünk el arról, hogy összetett függvény. Így a külső függvény deriváltját még szorozni kell a belső függvény deriváltjával.

   $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 7x)'}{(3x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 7x\cdot 7}{3}=\frac{7}{3}\lim_{x\to 0}\cos 7x$$

   Ez a határérték már egyszerű behelyettesítéssel meghatározható.

   $$\frac{7}{3}\lim_{x\to 0}\cos 7x=\frac{7}{3}\cos(7\cdot 0)=\frac{7}{3}$$

   Ezzel egyenlő az eredeti határérték is, azaz

   $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}=\frac{7}{3}.$$

6. **Feladat:** Határozzuk meg a $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(1-e^{x-2}\right)\cdot\cos(\pi\cdot x)}{x^2-4}$ határértéket!

   Megoldás: Vizsgáljuk a határérték típusát.

   A számláló hatáértéke: $\lim\limits_{x\to 2}\left(1-e^{x-2}\right)\cdot\cos(\pi\cdot x)=$

   $\left(1-e^{2-2}\right)\cdot\cos(\pi\cdot 2)=\left(1-e^0\right)\cdot\cos 2\pi=(1-1)\cdot 1=0.$

   A nevező határértéke: $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-4\right)=2^2-4=0.$

A határérték tehát $\frac{0}{0}$ típusú, azaz kritikus. Teljesülnek a szabály feltételei, de a feladat látszólag sokkal bonyolultabbnak tűnik, mint az eddigiek. Olyan tört határértéke ugyanis a kérdés, melynek számlálójában egy szorzat szerepel. Ha közvetlenül alkalmazzuk a szabályt, akkor ezt a szorzatot kell deriválnunk, s a derivált elég bonyolult lesz. Vegyük azonban észre, hogy a szorzat második tényezője a határérték szempontjából nem problémás, hiszen

$$\lim_{x\to 2}\cos(\pi\cdot x)=\cos(\pi\cdot 2)=1.$$

Célszerű ezért a szabály alkalmazása előtt szorzattá bontani a függvényt, és a tényezőket külön vizsgálni.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\left(1-e^{x-2}\right)\cdot\cos(\pi\cdot x)}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\cos(\pi\cdot x)\cdot\lim_{x\to 2}\frac{1-e^{x-2}}{x^2-4}$$

Mivel az első tényező határértékét már meghatároztuk, így csak a második tényezővel kell foglalkoznunk. Ez a határérték nyilván $\frac{0}{0}$ típusú, így teljesülnek a szabály feltételei.

$$\lim_{x\to 2}\frac{1-e^{x-2}}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(1-e^{x-2}\right)'}{\left(x^2-4\right)'}=\lim_{x\to 2}\frac{-e^{x-2}}{2x}$$

Ebbe már egyszerűen behelyettesíthetünk.

$$\lim_{x\to 2}\frac{-e^{x-2}}{2x}=\frac{-e^{2-2}}{2\cdot 2}=-\frac{1}{4}$$

Ezután térjünk vissza a szorzathoz.

$$\lim_{x\to 2}\cos(\pi\cdot x)\cdot\lim_{x\to 2}\frac{1-e^{x-2}}{x^2-4}=1\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$$

Ezzel egyenlő az eredeti határérték is.

7. **Feladat:** Határozzuk meg a $\lim\limits_{x\to\infty}(\operatorname{ch}x-x)$ határértéket!

   Megoldás: Az eddigi feladatokban törteknek a határértéke volt a kérdés, de most egy különbséget kell vizsgálnunk. Határozzuk meg külön a két tag határértékét.

   $$\lim_{x\to\infty}\operatorname{ch}x=\infty$$

   $$\lim_{x\to\infty}x=\infty$$

   A határérték tehát $\infty-\infty$ típusú. Ez is kritikus, de a L'Hospitál-szabály csak kritikus típusú törtek esetén alkalmazható. Így először át kell alakítanunk a kifejezést, hogy különbség helyett törtet kelljen vizsgálnunk. Mivel a $\operatorname{ch}x$ függvényt az exponenciális függvényből származtattuk, így várhatóan gyorsabban fog végtelenhez tartani, mint x. Emeljük ki a különbségből ezt a gyorsabban növekvő tagot.

   $$\lim_{x\to\infty}(\operatorname{ch}x-x)=\lim_{x\to\infty}\operatorname{ch}x\left(1-\frac{x}{\operatorname{ch}x}\right)$$

Immár egy szorzatot kell vizsgálnunk, aminek második tényezője egy különbség, amelyben az egyik tag tört. Azt várjuk, hogy ezen tört határértéke 0 lesz, hiszen a gyorsabban végtelenhez tartó taggal osztjuk a lassabban végtelenhez tartót. Lássuk be, hogy ez valóban így van, s vizsgáljuk innentől csak ezt a törtet, amely nyilván $\frac{\infty}{\infty}$ típusú. Erre tehát teljesülnek a L'Hospital-szabály feltételei.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\operatorname{ch} x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x)'}{(\operatorname{ch} x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\operatorname{sh} x}$$

Mivel $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sh} x = \infty$, ezért ez a határérték valóban 0, hiszen típusa $\frac{\text{véges}}{\infty}$.

Ezután térjünk vissza a kiemeléssel átalakított határértékhez.

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{ch} x \left(1 - \frac{x}{\operatorname{ch} x}\right)$$

Az első tényező végtelenhez tart, a második tényezője pedig egy különbség. Ezen különbségben a második tagról beláttuk, hogy 0-hoz tart, s ebből következően a második tényező határértéke 1. Ez a szorzat nem kritikus, hanem végtelent ad eredményül. Ugyanez jelekkel leírva a következő:

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{ch} x \left(1 - \frac{x}{\operatorname{ch} x}\right) = \infty(1-0) = \infty$$

Ugyanígy végtelenhez tart a feladatban szereplő különbség is, azaz:

$$\lim_{x\to\infty} (\operatorname{ch} x - x) = \infty.$$

A végtelenben tehát nincs határértéke a függvénynek.

7.2. Összetett feladatok

1. **Feladat:** Határozzuk meg a $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{3x}}{x^2}$ határértéket!

   Megoldás: Mivel egy tört határértéke a kérdés, vizsgáljuk meg külön a számlálót és a nevezőt.

   A számláló határértéke: $\lim\limits_{x\to\infty} e^{3x} = \infty$.

   A nevező határértéke: $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$.

   A határérték tehát $\frac{\infty}{\infty}$ típusú, teljesülnek a L'Hospital-szabály feltételei. A számláló deriválásakor figyeljünk oda, mert összetett függvényről van szó.

   $$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x}}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(e^{3x}\right)'}{\left(x^2\right)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x}\cdot 3}{2x}$$

   Ha megvizsgáljuk a kapott új határérték típusát, ismét $\frac{\infty}{\infty}$-t kapunk, azaz továbbra is kritikus. Ilyen esetben ismételten alkalmazhatjuk a szabályt. A számláló deriválásakor most se feledkezzünk meg a belső függvény deriváltjával történő szorzásról.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3\cdot e^{3x}}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(3\cdot e^{3x}\right)'}{(2x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{9\cdot e^{3x}}{2}$$

Mivel a számláló végtelenhez tart a nevező pedig egy pozitív konstans, így az egész tört is végtelenehez tart. Ez lesz az eredeti határérték is, azaz:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{3x}}{x^2}=\infty.$$

Megjegyzés: Sok feladatban előfordul, hogy a L'Hospital-szabályt alkalmazva ismét kritikus határértéket kapunk. Ilyenkor ismételten alkalmazhatjuk a szabályt.

2. **Feladat:** Határozzuk meg a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos 3x}$ határértéket!

   Megoldás: Elsőként határozzuk meg a határérték típusát.

   A számláló határértéke: $\lim\limits_{x\to 0}\sin^2 x=\sin^2 0=0$.

   A nevező határértéke: $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos 3x)=1-\cos(3\cdot 0)=0$.

   A határérték tehát $\dfrac{0}{0}$ típusú, így alkalmazható a L'Hospital-szabály. Mind a számláló, mind a nevező deriválásánál figyeljünk, mert mindegyikben előfordul összetett függvény.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sin^2 x\right)'}{\left(1-\cos 3x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cdot\cos x}{-(-\sin 3x)\cdot 3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cdot\cos x}{3\sin 3x}$$

   Vizsgáljuk meg az új határérték típusát.

   A számláló határértéke: $\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x\cdot\cos x)=2\sin 0\cdot\cos 0=0$.

   A nevező határértéke: $\lim\limits_{x\to 0}3\sin 3x=3\sin(3\cdot 0)=0$.

   A határérték tehát ismét $\dfrac{0}{0}$ típusú. Alkalmazzuk ismételten a szabályt. A számlálóban most egy szorzatot kell deriválnunk, a nevezőben pedig összetett függvényt.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cdot\cos x}{3\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{(2\sin x\cdot\cos x)'}{(3\sin 3x)'}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2(\cos x\cdot\cos x+\sin x\cdot(-\sin x))}{9\cos 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2(\cos^2 x-\sin^2 x)}{9\cos 3x}$$

   Ezután már behelyettesítéssel megkapjuk a a határértéket.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2(\cos^2 x-\sin^2 x)}{9\cos 3x}=\frac{2(\cos^2 0-\sin^2 0)}{9\cos(3\cdot 0)}=\frac{2}{9}$$

Ezzel egyezik meg az eredeti határérték is, azaz:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos 3x}=\frac{2}{9}$$

Bár megoldottuk a feladatot, egy kicsit még foglalkozzunk vele. A L'Hospital-szabály első alkalmazása után ugyanis egy kicsit másképp is haladhattunk volna. Használjuk fel a középiskolából ismert

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\sin 2\alpha$ összefüggést. Ekkor a következőt kapjuk:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cdot\cos x}{3\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3\sin 3x}$$

Így a számlálóban nem szorzat áll, hanem összetett függvény, s a szabály másodszori alkalmazásakor egyszerűbb a deriválás.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 2x)'}{(3\sin 3x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{9\cos 3x}$$

A határértéket ezután behelyettesítéssel kapjuk.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{9\cos 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos(2\cdot 0)}{9\cos(3\cdot 0)}=\frac{2}{9}$$

Természetesen ugyanazt az eredményt kaptuk, mint az előbb.

3. **Feladat:** Határozzuk meg a $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}{\sin\left(\dfrac{5}{x}\right)}$ határértéket!

Megoldás: Szokás szerint a határérték típusának vizsgálata az első lépés.

A számláló határértéke: $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)=\ln(1+0)=0.$

A nevező határértéke: $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\left(\dfrac{5}{x}\right)=\sin 0=0.$

A határérték tehát $\dfrac{0}{0}$ típusú, alkalmazható a szabály. A deriválások során vegyük figyelembe, hogy a számlálóban és a nevezőben is összetett függvény áll.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\sin\left(\frac{5}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right)'}{\left(\sin\left(\frac{5}{x}\right)\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{1+\frac{2}{x}}\cdot\left(-\dfrac{2}{x^2}\right)}{\cos\left(\frac{5}{x}\right)\cdot\left(-\dfrac{5}{x^2}\right)}$$

Ha újra megvizsgáljuk a határérték típusát, akkor megint $\dfrac{0}{0}$-t kapunk, mert a számlálóban a $-\dfrac{2}{x^2}$, a nevezőben pedig a $-\dfrac{5}{x^2}$ tart a 0-hoz. Nem célszerű azonban ismételten alkalmazni a szabályt. Vegyük észre, hogy a tört egyszerűsíthető $-\dfrac{1}{x^2}$-tel, ami igaziból a problémát okozza.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{x}}\cdot\left(-\dfrac{2}{x^2}\right)}{\cos\left(\dfrac{5}{x}\right)\cdot\left(-\dfrac{5}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{x}}\cdot 2}{\cos\left(\dfrac{5}{x}\right)\cdot 5}$$

Az egyszerűsítés után pedig meghatározható a határérték, mert már nem kritikus típusú a tört.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{x}}\cdot 2}{\cos\left(\dfrac{5}{x}\right)\cdot 5}=\frac{\dfrac{1}{1+0}\cdot 2}{\cos 0\cdot 5}=\frac{2}{5}$$

Ez tehát az eredit határérték is, azaz

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}{\sin\left(\dfrac{5}{x}\right)}=\frac{2}{5}.$$

Megjegyzés: A feladat megoldásából látható, hogy nem szabad meggondolatlanul mindig a L'Hospital-szabályt alkalmazni a kritikus esetekben. Ha most nem egyszerűsítünk, akkor igen csúnya függvényeket kell deriválnunk, és a deriválások után még bonyolultabb törtet kapunk. Ráadásul újra kritikus típusú határértéket kapnánk. Ebben a feladatban egyszerűsítés nélkül, csak a szabály alkalmazásával nem kapható meg az eredmény, akárhányszor is használjuk. Ezért nagyon fontos, hogy a szabály alkalmazása után egyszerűsítsünk, ha erre lehetőség van. Ha pedig nem tudunk egyszerűsíteni, akkor is hozzuk a függvényt minél egyszerűbb alakra.

4. **Feladat:** Határozzuk meg a $\lim\limits_{x\to+0}\left(x^2\cdot\ln x\right)$ határértéket!

   Megoldás: Most nem egy törtet kell vizsgálnunk, hanem egy szorzatot. Határozzuk meg külön az egyes tényezők határértékét.

   Az első tényező határértéke: $\lim\limits_{x\to+0}x^2=+0$.

   A második tényező határértéke: $\lim\limits_{x\to+0}\ln x=-\infty$.

   A határérték tehát ez előjelektől eltekintve $0\cdot\infty$ típusú, ami kritikus. Mivel a L'Hospital-szabály törtek esetén alkalmazható, ezért át kell alakítanunk a függvényt úgy, hogy szorzat helyett tört szerepeljen. Ezt úgy érhetjük el, ha szorzás helyett az egyik tényező reciprokával osztjuk a másik tényezőt. Jelen esetben a következőt írhatjuk:

   $$\lim_{x\to+0}\left(x^2\cdot\ln x\right)=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x^2}}.$$

Az így felírt határérték $\frac{\infty}{\infty}$ típusú, hiszen ha $\lim\limits_{x\to+0} x^2 = +0$, akkor $\lim\limits_{x\to+0} \frac{1}{x^2} = \infty$. Így tehát már alkalmazható a L'Hospital-szabály.

$$\lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} = \lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}$$

Az új határértéket nyilván célszerű átalakítani, hogy ne szerepeljen emeletes tört, és egyszerűsíthetünk is.

$$\lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to+0} \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{x^3}{2}\right) = -\frac{1}{2} \lim_{x\to+0} x^2$$

Ezután már csak be kell helyettesítenünk a határérték meghatározásához.

$$-\frac{1}{2} \lim_{x\to+0} x^2 = -\frac{1}{2} \cdot 0^2 = 0$$

Ezzel megkaptuk az eredeti határértéket is, azaz:

$$\lim_{x\to+0} \left(x^2 \cdot \ln x\right) = 0.$$

Megjegyzés: Ha egy $0 \cdot \infty$ típusú határértéket kell meghatároznunk, akkor a L'Hospital-szabályt úgy alkalmazhatjuk, hogy szorzás helyett, az egyik tényező reciprokával osztunk. Ilyenkor két lehetőségünk is van, hiszen az $a \cdot b$ szorzat helyett $\frac{a}{\left(\frac{1}{b}\right)}$ és $\frac{b}{\left(\frac{1}{a}\right)}$ is írható. Általában elmondható, hogy az egyszerűbb tényezőnek célszerű a reciprokát venni, mert a szabály alkalmazása során így lesznek egyszerűbbek a deriválások.

5. **Feladat:** Határozzuk meg a $\lim\limits_{x\to+0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$ határértéket!

   Megoldás: Most egy különbség határértéke a kérdés, így vizsgáljuk meg először a két tag határértékét.

   $$\lim_{x\to+0} \frac{1}{x} = \infty$$

   $$\lim_{x\to+0} \frac{1}{\sin x} = \infty$$

   A határérték tehát $\infty - \infty$ típusú, ami kritikus. A L'Hospital-szabály alkalmazásához törtté kell alakítanunk. Mivel a különbségben két tört szerepel, így a legegyszerűbb, ha közös nevezőre hozzuk őket.

   $$\lim_{x\to+0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to+0} \frac{\sin x - x}{x \cdot \sin x}$$

   Ha most megvizsgáljuk a határérték típusát, akkor $\frac{0}{0}$-t kapunk, hiszen

$\lim\limits_{x\to+0} \sin x - x = \sin 0 - 0 = 0$

$\lim\limits_{x\to+0} x \cdot \sin x = 0 \cdot \sin 0 = 0.$

Teljesülnek tehát a L'Hospital szabály feltételei.

$$\lim_{x\to+0} \frac{\sin x - x}{x \cdot \sin x} = \lim_{x\to+0} \frac{(\sin x - x)'}{(x \cdot \sin x)'} =$$

$$= \lim_{x\to+0} \frac{\cos x - 1}{1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x}$$

Vizsgáljuk meg a kapott új határérték típusát.

$\lim\limits_{x\to+0}(\cos x - 1) = \cos 0 - 1 = 0$

$\lim\limits_{x\to+0}(\sin x + x \cdot \cos x) = \sin 0 + 0 \cdot \cos 0 = 0$

Látható, hogy ismét $\frac{0}{0}$ típusú a határérték. Újra alkalmazzuk a L'Hospital-szabályt.

$$\lim_{x\to+0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cdot \cos x} = \lim_{x\to+0} \frac{(\cos x - 1)'}{(\sin x + x \cdot \cos x)'} =$$

$$\lim_{x\to+0} \frac{-\sin x}{\cos x + 1 \cdot \cos x + x \cdot (-\sin x)}$$

Ezt a határértéket pedig már behelyettesítéssel megkaphatjuk.

$$\lim_{x\to+0} \frac{-\sin x}{2\cos x - x \cdot \sin x} = \lim_{x\to+0} \frac{-\sin 0}{2\cos 0 - 0 \cdot \sin 0} = \frac{0}{2} = 0$$

Ezzel egyenlő tehát az eredeti határérték is, azaz:

$$\lim_{x\to+0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = 0.$$

6. **Feladat:** Határozzuk meg a $\lim\limits_{x\to1+0} x^{\left(\frac{1}{x-1}\right)}$ határértéket!

   Megoldás: Most egy hatvány határértéke a kérdés, így a típus meghatározásához megvizsgáljuk az alap és a kitevő határértékét.

   Az alap határértéke: $\lim\limits_{x\to1+0} x = 1.$

   A kitevő határértéke: $\lim\limits_{x\to1+0} \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{(1+0)-1} = \dfrac{1}{+0} = \infty.$

   A határérték tehát 1^∞ típusú, ami kritikus. Ahhoz, hogy alkalmazhassuk a L'Hospital-szabályt, törtet kellene kialakítanunk. Ehhez használjuk azt az átalakítást, ami már szerepelt az $(f(x))^{g(x)}$ típusú függvények deriválásakor. Ekkor az alapot alakítottuk át az $a^{\log_a b} = b$ összefüggés felhasználásával. Jelen esetben az alapban álló x-et célszerű felírni $e^{\ln x}$ formában. Ha ezt felhasználjuk, akkor a határérték a következő módon írható:

$$\lim_{x\to 1+0} x^{\left(\frac{1}{x-1}\right)} = \lim_{x\to 1+0} \left(e^{\ln x}\right)^{\left(\frac{1}{x-1}\right)}.$$

Mivel ismételt hatványozás esetén a kitevők szorzódnak, ezt tovább alakíthatjuk.

$$\lim_{x\to 1+0} \left(e^{\ln x}\right)^{\left(\frac{1}{x-1}\right)} = \lim_{x\to 1+0} e^{\left(\frac{\ln x}{x-1}\right)}$$

Így azt értük el, hogy az alapban egy konstans áll. Ezért ha vesszük a hatvány határértékét, akkor az alapban álló konstanst kell hatványoznunk a kitevő határértékére. Ez jelekkel leírva a következő:

$$\lim_{x\to 1+0} e^{\left(\frac{\ln x}{x-1}\right)} = e^{\left(\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{\ln x}{x-1}\right)}$$

Tehát elegendő már csak a kitevő határértékét vizsgálnunk. A kérdés innentől az alábbi:

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{\ln x}{x-1}.$$

Ez már tört, így határozzuk meg a számláló és a nevező határértékét a típus megállapításához.

$$\lim_{x\to 1+0} \ln x = \ln(1+0) = 0$$

$$\lim_{x\to 1+0} (x-1) = (1+0)-1 = 0$$

A határérték tehát $\frac{0}{0}$ típusú, így alkalmazható a L'Hospital-szabály.

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1+0} \frac{(\ln x)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1+0} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to 1+0} \frac{1}{x}$$

Ezt a határértéket már behelyettesítéssel megkapjuk.

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

Ezzel megkaptuk a kitevő határértékét. Ne feledjük, az eredeti határértéket úgy kapjuk, ha az e számot felemeljük a kitevő határértékére, azaz:

$$\lim_{x\to 1+0} x^{\left(\frac{1}{x-1}\right)} = e^1 = e.$$

7. **Feladat:** Határozzuk meg a $\lim\limits_{x\to +0} (\sin x)^x$ határértéket!

   Megoldás: Ebben a feladatban is egy hatvány határértéke a kérdés, így elsőként vizsgáljuk meg külön az alap és a kitevő határértékét.

   Az alap határértéke: $\lim\limits_{x\to +0} \sin x = \sin 0 = 0.$

   A kitevő határértéke: $\lim\limits_{x\to +0} x = 0.$

Amint látható, egy 0^0 típusú határérték a kérdés. Ez a típus is kritikus. Alakítsuk át megint az alapot úgy, mint az előző feladatban. Most a $\sin x$ helyett $e^{\ln(\sin x)}$-et írhatunk. Ezt felhasználva a határérték az alábbi alakot ölti:

$$\lim_{x\to+0}(\sin x)^x = \lim_{x\to+0}\left(e^{\ln(\sin x)}\right)^x.$$

Mivel a kitevők ilyen esetben szorzódnak, így ez tovább alakítható.

$$\lim_{x\to+0}\left(e^{\ln(\sin x)}\right)^x = \lim_{x\to+0} e^{(x\cdot\ln(\sin x))}$$

Mivel az alap konstans, így a hatvány határértékét úgy kapjuk, hogy az alapban álló konstanst a kitevő határértékére emeljük.

$$\lim_{x\to+0} e^{(x\cdot\ln(\sin x))} = e^{\left(\lim\limits_{x\to+0}(x\cdot\ln(\sin x))\right)}$$

Az igazi kérdés innentől tehát a kitevő határértéke, azaz:

$$\lim_{x\to+0}(x\cdot\ln(\sin x)).$$

Most egy szorzat határértékét kell meghatároznunk, így a típus vizsgálatához a tényezők határértéke szükséges.

$$\lim_{x\to+0} x = +0$$

$$\lim_{x\to+0}\ln(\sin x) = \ln(\sin +0) = \ln(+0) = -\infty$$

A határérték tehát előjelektől eltekintve $0\cdot\infty$ típusú, azaz kritikus. Akkor alkalmazhatjuk a L'Hospital szabályt, ha törtté alakítjuk. Szorzás helyett osszunk az egyik tényező reciprokával. Természetesen az első tényező, azaz x az egyszerűbb, így ennek célszerű a reciprokát venni.

$$\lim_{x\to+0}(x\cdot\ln(\sin x)) = \lim_{x\to+0}\frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}}$$

Mivel $\lim\limits_{x\to+0} x = +0$, ezért $\lim\limits_{x\to+0}\frac{1}{x} = \frac{1}{+0} = \infty$. Ebből következően a határérték $\frac{\infty}{\infty}$ típusú, tehát alkalmazható a L'Hospital-szabály.

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0}\frac{(\ln(\sin x))'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}{-\frac{1}{x^2}}$$

Ez így nagyon bonyolult alakban van, célszerű megszabadulni az emeletes törttől.

$$\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+0}\frac{-x^2\cdot\cos x}{\sin x}$$

Vizsgáljuk meg a kapott új határérték típusát.

$\lim\limits_{x\to+0}(-x^2 \cdot \cos x) = -0^2 \cdot \cos 0 = 0$

$\lim\limits_{x\to+0} \sin x = \sin 0 = 0$

Most $\frac{0}{0}$ típusunk van, ami szintén kritikus, így újra alkalmazhatjuk a szabályt.

$$\lim_{x\to+0} \frac{-x^2 \cdot \cos x}{\sin x} = \lim_{x\to+0} \frac{(-x^2 \cdot \cos x)'}{(\sin x)'} =$$

$$\lim_{x\to+0} \frac{-2x \cdot \cos x - x^2 \cdot (-\sin x)}{\cos x} = \lim_{x\to+0} \frac{-2x \cdot \cos x + x^2 \cdot \sin x}{\cos x}$$

Ezt a határértéket már behelyettesítéssel megkaphatjuk.

$$\lim_{x\to+0} \frac{-2x \cdot \cos x + x^2 \cdot \sin x}{\cos x} = \frac{-2 \cdot 0 \cdot \cos 0 + 0^2 \cdot \sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$$

Megkaptuk tehát a kitevő határértékét. Az eredeti határértéket is megkapjuk, ha az e számot felemeljük erre, azaz:

$$\lim_{x\to+0} (\sin x)^x = e^0 = 1.$$

8. Függvények menetének vizsgálata, szöveges szélsőérték feladatok

8.1. Alapfeladatok

1. **Feladat:** Hol növekvő az $f(x)$ függvény, ha deriváltja

   $f'(x) = (x+2)(x-5)^2$?

   Megoldás: Egy függvény növekedését, illetve csökkenését az első derivált előjeléből tudjuk vizsgálni. Ha ugyanis egy adott helyen egy függvény deriváltja pozitív, akkor ott növekszik a függvény, ha pedig negatív a derivált, akkor csökken a függvény. Ahol pedig 0 a derivált, ott lehet szélsőértéke a függvénynek. Első lépésként mindenképpen meg kell vizsgálnunk, mi a legbővebb halmaz, amelyen a derivált értelmezhető, majd ezen a halmazon vizsgáljuk a derivált előjelét. Jelen esetben a derivált minden valós számra értelmezhető, azaz $D_{f'} = \mathbb{R}$. Ezután következhet a derivált előjelének vizsgálata. Mivel egy függvény általában olyan helyen vált előjelet, ahol értéke zérus, így határozzuk meg, hol veszi fel a derivált a 0 értéket. Oldjuk meg tehát az $f'(x) = 0$ egyenletet. Most a konkrét esetben ez a következő:

   $(x+2)(x-5)^2 = 0.$

   Használjuk fel, hogy egy szorzat csak úgy lehet egyenlő 0-val, ha valamelyik tényezője 0. Így az egyenlet két egyszerűbb egyenletre bontható.

   $x+2=0$ vagy $(x-5)^2 = 0$

   Ezen egyenletek megoldásai: $x = -2$ és $x = 5$.

   Ha nem szeretnénk sokat írni, akkor ezután célszerű egy táblázatot készítenünk, amiben a derivált előjelét tüntetjük fel, majd ebből a következtetést az eredeti függvény növekedésére illetve csökkenésére. A derivált zérushelyei az értelmezési tartományt részekre bontják, s az így kapott részeken belül biztosan nem vált előjelet a derivált. Ezért a táblázat első sorában az értelmezési tartomány részeit adjuk meg. A második sorban tüntetjük fel azt, hogy az adott részen milyen előjelű a derivált, s végül a harmadik sorban következtetünk a függvény növekedésére vagy csökkenésére. A zérushelyeket is írjuk be az értelmezési tartomány részei közé, mert ezeken a helyeken lehet szélsőértéke a függvénynek. Jelen esetben a két zérushely három részre bontja a valós számok halmazát. A kisebb zérushelynél kisebb számok, azaz $x < -2$, két zérushely közötti számok, azaz $-2 < x < 5$, valamint a nagyobb zérushelynél nagyobb számok, azaz $5 < x$. Ezeket a részeket jelöljük a táblázat első sorában, valamint a két zérushelyet. A táblázat, egyelőre csak első sorát kitöltve, az alábbi módon néz ki.

	$x < -2$	$x = 2$	$-2 < x < 5$	$x = 5$	$5 < x$
f'					
f					

Töltsük ki ezután a második sort is. Vizsgáljuk meg, milyen előjelű a derivált az értelmezési tartomány egyes részein. Azt már tudjuk, hogy $x = -2$ és $x = 5$ estén a derivált zérus, így ezekre a helyekre 0-t írunk. A három intervallumon legegyszerűbben úgy dönthető el a derivált előjele, ha veszünk egy számot, ami az adott intervallumba esik, és azt behelyettesítjük a deriváltba. Amilyen előjelű értéket kapunk, olyan előjelű a derivált az egész intervallumon.

Elsőként vegyünk tehát egy -2-nél kisebb számot, pl. legyen $x = -3$. Helyettesítsük ezt a deriváltba.

$f'(-3) = (-3 + 2)(-3 - 5)^2 = -64$

Negatív értéket kaptunk, így $x < -2$ estén a második sorban azt tüntetjük fel, hogy a derivált negatív.

Vegyünk ezután egy -2 és 5 közé eső számot, pl. legyen $x = 0$. Most ezt helyettesítjük a deriváltba. (Ha választhatjuk a 0-t, akkor célszerű azt választani, mert azt könnyű helyettesíteni.)

$f'(0) = (0 + 2)(0 - 5)^2 = 50$

Pozitív értéket kaptunk, így $-2 < x < 5$ estén a második sorban azt tüntetjük fel, hogy a derivált pozitív.

Végül vegyünk egy 5-nél nagyobb számot, pl. legyen $x = 6$. Helyettesítsük ezt a deriváltba.

$f'(6) = (6 + 2)(6 - 5)^2 = 8$

Most is pozitív értéket kaptunk, így $5 < x$ estén a második sorban azt tüntetjük fel, hogy a derivált pozitív.

Ha kitöltjük a második sort is, akkor táblázatunk a következő:

	$x < -2$	$x = 2$	$-2 < x < 5$	$x = 5$	$5 < x$
f'	neg. $(-)$	0	poz. $(+)$	0	poz. $(+)$
f					

Most töltsük ki a harmadik sort is, írjuk be az intervallumokon, hol nő és hol csökken a függvény. A derivált zérushelyeinél pedig tüntessük fel azt, hogy van-e, s ha igen, akkor milyen jellegű szélsőérték (SZÉ) van.

Ha $x < -2$, akkor negatív a derivált, itt tehát csökken a függvény.

Ha $-2 < x < 5$ vagy $5 < x$, akkor pozitív a derivált, ezeken az intervallumokon tehát nő a függvény.

Az $x = -2$ helyen előjelet vált a derivált, így ezen a helyen van szélsőértéke a függvénynek. Mivel az $x = -2$ hely előtt negatív a derivált, azaz csökken a függvény, utána pedig pozitív a derivált, azaz nő a függvény, így ezen a helyen lokális minimum van.

Az $x = 5$ helyen a derivált nem vált előjelet, előtte is, és utána is pozitív a derivált, így ezen a helyen nincs szélsőérték, itt is növekvő a függvény.

A teljesen kitöltött táblázat így a következő:

	$x < -2$	$x = 2$	$-2 < x < 5$	$x = 5$	$5 < x$
f'	neg. $(-)$	0	poz. $(+)$	0	poz. $(+)$
f	csökk. $(\downarrow)$	lok. min.	nő $(\uparrow)$	nincs SZÉ, nő $(\uparrow)$	nő $(\uparrow)$

A kész táblázat alapján már csak válaszolnunk kell a kérdésre. Amint látható, a függvény növekszik, ha $-2 < x$, vagy másképp fogalmazva, a $(-2, \infty)$ intervallumon nő a függvény.

2. **Feladat:** Hol csökkenő az $f(x)$ függvény, ha deriváltja
$f'(x) = \dfrac{x-3}{x+4}$?
Megoldás: A feladat nagyon hasonlít az előzőhöz, így ugyanúgy járhatunk el. Első lépésként határozzuk meg, mely halmazon értelmezhető a függvény deriváltja. A nevező nem lehet zérus, így $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$. Ezután oldjuk meg az $f'(x) = 0$ egyenletet.
$\dfrac{x-3}{x+4} = 0$
Egy tört akkor 0, ha számlálója 0, tehát elég az $x - 3 = 0$ egyenlettel foglalkoznunk. Ennek $x = 3$ a megoldása.

Nézzük ezután, milyen részekre kell bontanunk az értelmezési tartományt. Az előző feladatban szerepelt, hogy a derivált zérushelyei bontják részekre az értelmezési tartományt, mert általában ezeken a helyeken változik meg a derivált előjele. De nem csak zérushelyen változhat egy függvény előjele, hanem olyan helyen is, ahol nincs értelmezve. Gondoljunk pl. az $\dfrac{1}{x}$ függvényre, amely nincs értelmezve az $x = 0$ helyen. A negatív x értékekre negatív ez a függvény, a pozitív x-ekre pedig pozitív. Nincs tehát zérushely a 0-ban, hisz a függvény itt nem is értelmezett, de a függvény előjele mégis változik. Amikor készítjük a táblázatot, akkor tehát nem csak a derivált zérushelyével kell részekre bontani az értelmezési tartományt, hanem az értelmezési tartományban levő szakadási hellyel is. Készítsük el most a táblázatot, egyelőre az első sorát kitöltve. A szakadási helyen azonban a második és a harmadik sorban jelölhetjük, hogy ott a derivált nem értelmezett, így a függvényről sem tudunk semmit mondani.

	$x < -4$	$x = -4$	$-4 < x < 3$	$x = 3$	$3 < x$
f'		X			
f		X			

Ezután vizsgáljuk meg az értelmezési tartomány részein a derivált előjelét, és ebből határozzuk meg, nő vagy csökken ott a függvény.

Vegyünk egy -4-nél kisebb számot. Legyen pl. $x = -5$, s helyettesítsük ezt a deriváltba.
$f'(-5) = \dfrac{-5-3}{-5+4} = 8$
Pozitív értéket kaptunk, tehát $x < -4$ esetén pozitív a derivált, ebből következően itt nő a függvény.

Vegyünk egy -4 és 3 közé eső számot. Legyen pl. $x = 0$, s ezt is helyettesítsük a deriváltba.
$f'(0) = \dfrac{0-3}{0+4} = -\dfrac{3}{4}$
Negatív értéket kaptunk, tehát ha $-4 < x < 3$, akkor negatív a derivált, s így itt csökken a függvény.

Végül vegyünk egy 3-nál nagyobb számot is. Legyen pl. $x = 4$, és helyettesítsük ezt a deriváltba.
$f'(4) = \dfrac{4-3}{4+4} = \dfrac{1}{8}$
Pozitív értéket kaptunk, így ha $3 < x$ akkor pozitív a derivált, tehát ekkor nő függvény.

Mivel a derivált értéke az $x = 3$ helyen előjelet vált, így ezen a helyen van lokális szélsőértéke a függvénynek. Mert a derivált negatívból pozitívba megy át, így ezen a helyen lokális minimum van.

Ezután kitölthetjük a táblázat második és harmadik sorát is.

	$x < -4$	$x = -4$	$-4 < x < 3$	$x = 3$	$3 < x$
f'	$+$	X	$-$	0	$+$
f	$\uparrow$	X	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$

A kitöltött táblázat alapján válaszolhatunk a feladat kérdésére. A függvény csökken, ha $-4 < x < 3$. Másképp fogalmazva, a függvény a $(-4, 3)$ intervallumon csökkenő.

3. **Feladat:** Hol és milyen jellegű szélsőértéke van az $f(x)$ függvénynek, ha deriváltja $f'(x) = (x-2)^2 \cdot \ln x$?

   Megoldás: Az előző két feladat megoldásából láthattuk, hogy egy függvény szélsőértékeinek meghatározásához is azokra a lépésekre van szükség, mint a növekedés és a csökkenés vizsgálatához. Így járjunk el hasonlóan, mint az előző két feladatban. Elsőként vizsgáljuk meg, mely halmazon értelmezhető a függvény deriváltja. Most a ln miatt ki kell kötnünk, hogy x csak pozitív értékeket vehet fel, így $D_{f'} = \mathbb{R}^+$.

   Ezután oldjuk meg az $f'(x) = 0$ egyenletet.

   $(x-2)^2 \cdot \ln x = 0$

   Arra hivatkozunk, hogy szorzat csak akkor lehet zérus, ha valamelyik tényezője 0. Így az egyenletet egyszerűbb egyenletekre bontjuk.

   $(x-2)^2 = 0$ vagy $\ln x = 0$

   Az első egyenlet megoldása nyilván $x = 2$.

   A második egyenlet mindkét oldalát tekintsük úgy mint kitevőt, s az e számot emeljük fel ezen kitevőkre. Így a bal oldalon olyan kompozíciót kapunk, amiben egy függvény és inverze szerepel, így ott egyszerűen x áll.

   $\ln x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{\ln x} = e^0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 1$

   A derivált zérushelyei tehát az 1 és a 2.

   Ezután elkészíthetjük a táblázatot, egyelőre csak az első sort kitöltve. Figyeljünk oda, hogy az értelmezési tartomány most csak a pozitív valós számok halmaza. Így az első részben nem elég $x < 1$-et írni, ott $0 < x < 1$-nek kell szerepelni.

	$0 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 2$	$x = 2$	$2 < x$
f'					
f					

   Ezután vizsgáljuk a derivált előjelét az egyes részeken, s ebből következtessünk a növekedésre vagy a csökkenésre.

   A $0 < x < 1$ egyenlőtlenségnek eleget tesz pl. az $x = 0.5$

   $f'(0.5) = (0.5-2)^2 \cdot \ln 0.5 \approx -1.56$

   A derivált értéke itt negatív, tehát ezen az intervallumon csökken a függvény.

   Az $1 < x < 2$ egyenlőtlenségnek pl. az $x = 1.5$ tesz eleget.

   $f'(1.5) = (1.5-2)^2 \cdot \ln 1.5 \approx 0.101$

   A derivált értéke ezen a helyen pozitív, ebből következően ezen az intervallumon nő a függvény.

Végül a $2 < x$ egyenlőtlenségnek eleget tesz pl. az $x = 3$.

$f'(3) = (3-2)^2 \cdot \ln 3 \approx 1.10$

A derivált pozitív ezen a helyen, így itt is nő a függvény.

Az $x = 1$ helyen a derivált előjele megváltozik, így itt a függvénynek lokális szélsőértéke van. Mivel a derivált negatívból pozitívba megy át ezen a helyen, így itt lokális minimuma van a függvénynek.

Az $x = 2$ helyen a derivált nem vált előjelet, így ezen a helyen nincs szélsőértéke a függvénynek. Mivel előtte és utána is pozitív a derivált, így ezen a helyen is nő a függvény.

Töltsük ki ezután a táblázat második és harmadik sorát is.

	$0 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 2$	$x = 2$	$2 < x$
f'	$-$	0	$+$	0	$+$
f	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$	nincs SZÉ, $\uparrow$	$\uparrow$

A függvénynek tehát csak az $x = 1$ helyen van lokális szélsőértéke, ahol lokális minimuma van.

4. **Feladat:** Hol konvex az $f(x)$ függvény, ha második deriváltja

   $f''(x) = (x-1)(x+6)^3\,?$

   Megoldás: Amikor egy függvényt olyan szempontból vizsgálunk, hogy hol konvex, illetve hol konkáv, akkor ugyanúgy járhatunk el, mint a növekedés és csökkenés vizsgálatánál. Ilyenkor azonban a második derivált előjelével kell foglalkoznunk. Ahol ugyanis pozitív egy függvény második deriváltja, ott konvex a függvény, ahol pedig negatív a második derivált, ott konkáv a függvény. Természetesen ilyenkor azzal kell kezdenünk, hogy megállapítjuk, hol értelmezhető a második derivált, és ezen a halmazon vizsgáljuk az előjelét. Jelen esetben minden valós számra értelmezhető a második derivált, azaz $D_{f''} = \mathbb{R}$. Ezután határozzuk meg a második derivált zérushelyeit, azaz oldjuk meg az $f''(x) = 0$ egyenletet.

   $(x-1)(x+6)^3 = 0$

   Mivel szorzat egyenlő 0-val, így ez két egyenletre bontható.

   $x - 1 = 0$ vagy $(x+6)^3 = 0$

   Ezen egyenletek megoldásai: $x = 1$ és $x = -6$.

   Most hasonló táblázatot célszerű készítenünk, mint amikor növekedés és csökkenés, azaz monotonitás szempontjából vizsgáltunk függvényt. Annyi csak a változás, hogy a második sorban nem az első, hanem a második derivált előjelét tüntetjük majd fel. Természetesen az értelmezési tartományt most a második derivált zérushelyei bontják részekre, hiszen ezeken a helyeken változhat meg a második derivált előjele. Ha egyelőre csak az első sort töltjük ki, akkor táblázatunk az alábbi lesz.

	$x < -6$	$x = -6$	$-6 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x$
f''					
f					

Ezután vizsgáljuk meg a második derivált előjelét az értelmezési tartomány egyes részein. Ezt végrehajthatjuk úgy, ahogyan a korábbiakban vizsgáltunk előjelet, azaz mindegyik részből kiválasztottunk egy számot, és azt behelyettesítettük. Mivel azonban a második derivált egy szorzat, így megtehetjük azt is, hogy külön vizsgáljuk az egyes tényezők előjelét, és ebből következtetünk a szorzat előjelére.

Ha pl. $x < -6$, akkor nyilván $x - 1 < 0$, azaz a derivált első tényezője negatív. Persze ekkor $x+6 < 0$ is teljesül, amiből $(x+6)^3 < 0$ is következik, tehát a második tényező is negatív. Két negatív szám szorzata pedig pozitív, azaz $x < -6$ esetén pozitív a második derivált, s ebből következően itt konvex a függvény.

Hasonlóan, ha $-6 < x < 1$, akkor $x - 1 < 0$, és $x + 6 > 0 \iff (x + 6)^3 > 0$, azaz a szorzat egyik tényezője negatív, másik tényezője pedig pozitív, tehát ekkor negatív a második derivált. Ez azt jelenti, ezen az intervallumon konkáv a függvény.

Végül ha $1 < x$, akkor $x - 1 > 0$, és $x + 6 > 0 \iff (x + 6)^3 > 0$, tehát mindkét tényező pozitív, s így a második derivált is pozitív. Ennek következtében ezen az intervallumon konvex a függvény.

Mivel a második derivált mindkét zérushelyében ($x = -6, x = 1$) megváltozik a második derivált előjele, így mindkét helyen inflexiós pontja van a függvénynek.

Ezek alapján már kitölthetjük a táblázat második és harmadik sorát is.

	$x < -6$	$x = -6$	$-6 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	konvex ($\smile$)	infl. p.	konkáv ($\frown$)	infl. p.	konvex ($\smile$)

Legvégül adjunk választ a feladat kérdésére. Amint a táblázatból látható, a függvény konvex, ha $x < -6$ vagy ha $1 < x$. Ugyanezt úgy is írhatjuk, hogy a függvény a $(-\infty, -6) \bigcup (1, \infty)$ halmazon konvex.

5. **Feladat:** Hol konkáv az $f(x)$ függvény, ha második deriváltja

$$f''(x) = \frac{5^x}{(x+3)(x-4)}\,?$$

Megoldás: Az előző feladat megoldásában ismertetettek szerint járunk el. Vizsgáljuk meg, mely halmazon értelmezhető a függvény második deriváltja. Mivel a nevezőben nem állhat 0, így $x + 3 \neq 0$ és $x - 4 \neq 0$. Ezekből következik, hogy $x \neq -3$ és $x \neq 4$. A második derivált értelmezési tartománya tehát: $D_{f''} = I\!R \setminus \{-3, 4\}$.

Ezután oldjuk meg az $f''(x) = 0$ egyenletet.

$$\frac{5^x}{(x+3)(x-4)} = 0$$

Tört csak úgy lehet zérus, ha a számlálója zérus, így egyszerűbb egyenletet kapunk.

$$5^x = 0$$

Ennek az egyenletnek azonban nincs megoldása, hiszen 5^x értéke pozitív minden valós x esetén. A második deriváltnak tehát nincsen zérushelye.

Mivel egy függvény előjele ott is változhat, ahol a függvény nincs értelmezve, így bár nincs a második deriváltnak zérushelye, de az értelmezési tartományt a szakadási helyek mégis részekre bontják. Ha elkezdjük kitölteni a szokásos táblázatot, akkor most a következőt kapjuk.

	$x < -3$	$x = -3$	$-3 < x < 4$	$x = 4$	$4 < x$
f''		X		X	
f		X		X	

A szakadási helyeken egyből jelölhettük, hogy mivel ott nem létezik a második derivált, így a függvényről sem mondhatunk semmit.

Vizsgáljuk ezután az egyes részeken a második derivált előjelét. Most olyan törtünk van, melynek számlálója minden x esetén pozitív, így csak a nevezőt kell vizsgálnunk, ami egy szorzat. Itt megtehetjük, hogy külön vizsgáljuk a tényezők előjelét.

Ha $x < -3$, akkor $x + 3 < 0$ és $x - 4 < 0$, tehát a nevező pozitív, így a második derivált is pozitív. Ebből következően a függvény konvex.

Ha $-3 < x < 4$, akkor $x+3 > 0$ és $x-4 < 0$, tehát a nevező negatív, így a második derivált is negatív. Ebből következően a függvény konkáv.

Ha pedig $4 < x$, akkor $x+3 > 0$ és $x-4 > 0$, tehát a nevező pozitív, így a második derivált is pozitív. Ebből következően a függvény konvex.

Immáron kitöltethetjük a teljes táblázatot.

	$x < -3$	$x = -3$	$-3 < x < 4$	$x = 4$	$4 < x$
f''	$+$	X	$-$	X	$+$
f	$\smile$	X	$\frown$	X	$\smile$

A táblázatból kiolvasható, hogy a függvény a $(-3, 4)$ intervallumon konkáv.

6. **Feladat:** Hol van inflexiós pontja az $f(x)$ függvénynek, ha második deriváltja $f''(x) = (x-7)^6 \cdot (e^x - 1)$?

   Megoldás: Most is a második derivált értelmezési tartományának vizsgálatával kezdjük. Jelen esetben ez az összes valós szám, azaz $D_{f''} = \mathbb{R}$.

   Oldjuk meg az $f''(x) = 0$ egyenletet. Egy függvénynek ugyanis ott lehet inflexiós pontja, ahol a második deriváltja 0.

   $(x-7)^6 \cdot (e^x - 1) = 0$

   Mivel a bal oldal szorzat, ezt egyszerűbb egyenletekre bontjuk.

   $(x-7)^6 = 0$ vagy $e^x - 1 = 0$

   Az első egyenlet megoldása nyilván $x = 7$. A második egyenletet rendezzük át.

   $e^x - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad e^x = 1$

   Vegyük mindkét oldal logaritmusát.

   $\ln(e^x) = \ln 1$

   Mivel a bal oldalon egy függvény és az inverze áll egy összetételben, így ott valójában egyszerűen x szerepel.

   $x = \ln 1 = 0$

   A második egyenlet megoldása így $x = 0$.

   Két zérushelye van tehát a második deriváltnak, az $x = 0$ és az $x = 7$.

   Ezek után a táblázat első sora kitölthető.

	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 7$	$x = 7$	$7 < x$
f''					
f					

   Vizsgáljuk ezután a második derivált előjelét. Mivel olyan szorzat, aminek első tényezője nem vesz fel negatív értéket, hiszen páros kitevőjű hatvány, így csak a második tényező előjelével kell foglalkoznunk.

   Ha $x < 0$, akkor $e^x < 1$, ezért $e^x - 1 < 0$. Ekkor tehát negatív a második derivált, s itt konkáv a függvény.

   Ha $0 < x < 7$, akkor $e^x > 1$, ezért $e^x - 1 > 0$. Így itt pozitív a második derivált, tehát konvex a függvény.

   Ha $7 < x$, akkor $e^x > 1$, ezért $e^x - 1 > 0$. Így itt is pozitív a második derivált, tehát itt is konvex a függvény.

Amint látható, a második derivált zérushelyei közül az $x = 0$ helyen előjelet vált a második derivált, így itt inflexiós pontja van a függvénynek. Viszont az $x = 7$ helyen a második derivált nem vált előjelet, így itt nincs inflexiós pont.

Töltsük ki a teljes táblázatot.

	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 7$	$x = 7$	$7 < x$
f''	$-$	0	$+$	0	$+$
f	$\frown$	infl. p.	$\smile$	nincs infl. p, $\smile$	$\smile$

A függvénynek tehát az $x = 0$ helyen van inflexiós pontja.

8.2. Összetett feladatok

1. **Feladat:** Vizsgáljuk meg monotonitás és szélsőérték szempontjából az $f(x) = \dfrac{x^2}{(x+1)^2}$ függvényt!

   Megoldás: Amikor egy függvényt valamilyen szempontból vizsgálunk, akkor elsőként mindig az értelmezési tartományt kell meghatároznunk. Jelen esetben ki kell kötnünk, hogy a nevező nem lehet 0, s ebből az következik, hogy $x \neq -1$.

   A függvény értelmezési tartománya tehát: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

   A monotonitás vizsgálata azt jelenti, hogy meghatározzuk, hol nő, hol csökken a függvény. Ehhez elő kell állítanunk a függvény deriváltját. Alkalmazzuk a törtekre vonatkozó deriválási szabályt.

   $$f'(x) = \frac{2x \cdot (x+1)^2 - x^2 \cdot 2(x+1)}{((x+1)^2)^2}$$

   Ez ilyen formában nagyon csúnyán néz ki, ezért próbáljunk alakítani rajta. Emeljünk ki a számlálóban, amit csak lehet, a nevezőt pedig írjuk egyetlen hatványként.

   $$f'(x) = \frac{2x(x+1)[(x+1) - x]}{(x+1)^4}$$

   Ezután egyszerűsítsünk, és a szögletes zárójelen belül vonjunk össze.

   $$f'(x) = \frac{2x}{(x+1)^3}$$

   A derivált minél egyszerűbb alakra hozása azért fontos, mert ezután meg kell oldanunk az $f'(x) = 0$ egyenletet, valamint vizsgálnunk kell majd a derivált előjelét. Ha a derivált bonyolult alakban van felírva, akkor mind az egyenlet megoldása, mind az előjel vizsgálata nehézségekbe ütközik. Általában elmondhatjuk, hogy ha lehetőség van kiemelésre, akkor ezzel a lehetőséggel élni kell, s törtek esetében egyszerűsítsünk, ha erre lehetőség van.

Most oldjuk meg az $f'(x) = 0$ egyenletet, hogy megkapjuk, hol lehet szélsőértéke a függvénynek.

$$\frac{2x}{(x+1)^3} = 0$$

Tört csak úgy lehet egyenlő 0-val, ha számlálója 0, így egyszerűbb egyenletet kapunk.

$$2x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0$$

Ezután a szokásos módon táblázatot készíthetünk. Elsőként csak az első sort töltsük ki, melyben feltüntetjük az értelmezési tartomány részeit, melyeken belül már nem változik a derivált előjele. Az értelmezési tartományt a derivált zérushelye és az értelmezési tartományban levő szakadás bontja részekre.

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x$
f'		X			
f		X			

Most vizsgáljuk meg a derivált előjelét az egyes részeken. A derivált tört, így külön vizsgálhatjuk a számláló és a nevező előjelét, amiből következtethetünk a tört előjelére.

Ha $x < -1$, akkor a számláló, azaz $2x$ negatív, és a nevező, azaz $(x+1)^3$ is negatív, így a derivált ekkor pozitív. Ebben az eesetben tehát nő a függvény.

Ha $-1 < x < 0$, akkor $2x$ negatív, de $(x+1)^3$ pozitív, így negatív lesz a derivált. A függvény tehát ekkor csökken.

Ha $0 < x$, akkor $2x$ is pozitív, és $(x+1)^3$ is pozitív, azaz pozitív lesz a derivált. Ebből következően itt nő a függvény.

Az $x = 0$ helyen a derivált előjele megváltozik, így itt szélsőértéke van a függvénynek. Mivel a derivált negatívból pozitívba megy át ezen a helyen, így itt lokális minimuma van a függvénynek.

Készítsük el a teljes táblázatot.

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x$
f'	$+$	X	$-$	0	$+$
f	$\uparrow$	X	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$

A táblázattal így megadtuk, hogy hol nő, és hol csökken a függvény, valamint hol, milyen jellegű szélsőértéke van. Már csak egyetlen feladatunk van, megadni a szélsőérték nagyságát. Helyettesítsük be a függvénybe azt a helyet, ahol szélsőértéke van.

$f(0) = \dfrac{0^2}{(0+1)^2} = 0$

A lokális minimum értéke tehát 0.

2. **Feladat:** Vizsgáljuk meg konvexitás szempontjából az $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ függvényt. Adjuk meg az inflexiós pont(ok) koordinátáit is!

   Megoldás: Elsőként most is a függvény értelmezési tartományát kell vizsgálnunk. Mivel nevező nem lehet zérus, így ki kell kötnünk, hogy $x \neq 0$, azaz $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   Ezután állítsuk elő a függvény második deriváltját, mert a konvexitás vizsgálatához erre lesz szükségünk. Az első derivált előállításakor összetett függvényt deriválunk. Külső függvény az e^x, belső függvény pedig az $\dfrac{1}{x}$.

   $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\dfrac{1}{x}\right)' = e^{\frac{1}{x}} \cdot (x^{-1})' = e^{\frac{1}{x}} \cdot (-x^{-2})$

   A második deriválás során a szorzatra vonatkozó szabályt használjuk.

   $f''(x) = \left(e^{\frac{1}{x}}\right)' \cdot (-x^{-2}) + e^{\frac{1}{x}} \cdot (-x^{-2})' =$

   $= \left[e^{\frac{1}{x}} \cdot (-x^{-2})\right] \cdot (-x^{-2}) + e^{\frac{1}{x}} \cdot (2x^{-3}) = e^{\frac{1}{x}} \cdot x^{-4} + 2e^{\frac{1}{x}} \cdot x^{-3}$

   Amint az korábban már szerepelt, ilyenkor célszerű kiemelni, amit csak lehet. Figyeljünk oda, hogy a hatványokból azt emeljük ki, ahol kisebb a kitevő, s ez most az x^{-4}. Ha pedig az x^{-3}-ból kiemelünk x^{-4}-t, akkor ott x fog maradni.

   $f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot x^{-4} \cdot (1 + 2x)$

   A negatív kitevős hatvány helyett törtet is írhatunk. Így a második derivált a következő alakot ölti:

   $f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \dfrac{1+2x}{x^4}$

   Miután a második deriváltat sikerült egyszerűbb alakra hozni, oldjuk meg az $f''(x) = 0$ egyenletet.

   $e^{\frac{1}{x}} \cdot \dfrac{1+2x}{x^4} = 0$

   Az első tényező nem lehet egyenlő 0-val, hiszen az exponenciális függvény csak pozitív értékeket vesz fel. Ennek következtében elég csak a második tényezőben levő törtet vizsgálnunk.

   $\dfrac{1+2x}{x^4} = 0$

   De a tört csak úgy lehet 0, ha a számlálója 0, így az egyenlet még tovább egyszerűsödik.

$1 + 2x = 0$

Ennek megoldása pedig $x = -0.5$.

Ezután elkészíthetjük a táblázatot, kitöltve az első sort. Az értelmezési tartományt egyrészt a második derivált zérushelye, másrészt az értelmezési tartományban levő szakadási hely osztja részekre.

	$x < -0.5$	$x = -0.5$	$-0.5 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x$
f''				X	
f				X	

Vizsgáljuk ezután a második derivált előjelét a különböző részeken. Az $e^{\frac{1}{x}}$, valamint az x^4 csak pozitív értékeket vehet fel, így elég csak az $1 + 2x$ előjelét vizsgálnunk.

Ha $x < -0.5$, akkor $1 + 2x < 0$, így a derivált negatív, s ebből következően itt konkáv a függvény.

Ha $-0.5 < x < 0$, akkor $1 + 2x > 0$, s ezért itt konvex a függgény.

Ha pedig $0 < x$, akkor $1 + 2x > 0$ ismét, így itt is konvex a függvény.

Az $x = -0.5$ helyen előjelet vált a második derivált, így ezen a helyen inflexiós pontja van a függvénynek.

Töltsük a teljes táblázatot.

	$x < -0.5$	$x = -0.5$	$-0.5 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x$
f''	$-$	0	$+$	X	$+$
f	$\frown$	infl. p.	$\smile$	X	$\smile$

Ezután már csak az inflexiós pont második koordinátáját kell meghatároznunk. Ehhez helyettesítsük be a függvénybe az $x = -0.5$ értéket, ahol az inflexiós pont van.

$f(-0.5) = e^{\frac{1}{-0.5}} = e^{-2}$

Az inflexiós pont koordinátái tehát: $(-0.5, e^{-2})$

3. **Feladat:** Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ függvényen!

   Megoldás: Egy teljes függvényvizsgálat során minden olyan szempontból elemezzük a függvényt, amiről korábban már szó esett. Célszerű pontokba szedni a vizsgálat lépéseit, nehogy valami elmaradjon. A vizsgálati szempontok egy lehetséges csoportosítása a következő:

   (a) Az értelmezési tartomány meghatározása.

(b) A grafikon és a tengelyek közös pontjainak meghatározása.
(c) Szimmetria tulajdonságok vizsgálata.
(d) Határértékek az értelmezési tartomány szélein.
(e) Monotonitás és szélsőérték vizsgálata.
(f) Konvexitás vizsgálata, inflexiós pontok meghatározása.
(g) Grafikon rajzolása.
(h) Az értékkészlet meghatározása.

Hajtsuk most végre ezeket a lépéseket a konkrét feladat esetén

(a) Az értelmezési tartomány meghatározása.
Mivel $x^2+1>0$ minden valós x-re, ezért $D_f = \mathbb{R}$.
(b) A grafikon és a tengelyek közös pontjainak meghatározása.
A függvény grafikonja és az y tengely metszéspontját az egyszerűbb meghatározni. Ha a 0 eleme az értelmezési tartománynak, akkor be kell helyettesítenünk a függvénybe. (A grafikon az y tengelyet legfeljebb egy pontban metszheti.)
$f(0) = \ln(0^2+1) = \ln 1 = 0$
A grafikon és az x tengely több helyen is metszheti egymást. Ezen metszéspontok helyét az $f(x)=0$ egyenlet megoldásai adják, azaz ilyenkor a függvény zérushelyeit határozzuk meg. Jelen esetben az alábbi egyenletet kell megoldanunk.
$\ln(x^2+1) = 0$
Tekintsük mindkét oldalt kitevőnek, s emeljük fel az e számot a kitevőre.
$e^{\ln(x^2+1)} = e^0$
A bal oldalon függvény és inverze áll egy összetételben, így ott valójában csak az argumentum, azaz x^2+1 áll.
$x^2+1 = e^0 = 1$
Ennek az egyenletnek pedig nyilvánvalóan csak az $x=0$ a megoldása. A függvénynek tehát most csak egy zérushelye van, és ez az $x=0$. A függvény grafikonja tehát átmegy az origón, így egyetlen helyen van közös pontja az x és az y tengellyel. Mivel korábban már kiderült, hogy $f(0)=0$, így előre tudhattuk, hogy az $x=0$ zérushely lesz. Az egyenlet megoldásával azt igazoltuk, hogy csak ez az egyetlen zérushely létezik.
(c) Szimmetria tulajdonságok vizsgálata.
Mivel tudjuk, az x^2+1 páros függvény, s jelen esetben ez a belső függvény egy összetett függvényben, így sejthető, hogy függvényünk páros lesz. Igazoljuk ezt. Egy függvény akkor páros, ha

minden $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$ is teljesül, és $f(-x) = f(x)$ minden $x \in D_f$ esetén. Ennek teljesülését kell ellenőriznünk.

$f(-x) = \ln\left((-x)^2 + 1\right) = \ln\left(x^2 + 1\right) = f(x)$

Ez minden $x \in D_f$ esetén teljesül, tehát valóban páros a függvény. A grafikonja így szimmetrikus lesz az y tengelyre.

(d) Határértékek az értelmezési tartomány szélein.

Mivel az értelmezési tartomány a valós számok halmaza, így két határértéket kell csak vizsgálnunk, egyrészt a $-\infty$-ben, másrészt pedig a $+\infty$-ben. Mert összetett függvény határértékét kel vizsgálnunk, így először a belső a belső függvény határértékét határozzuk meg, majd vesszük a külső függvény határértékét azon a helyen, ahova a belső függvény tart.

Elsőként a $-\infty$-ben nézzük a határértéket.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2 + 1\right) = \infty$

Legyen $t = x^2 + 1$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(x^2 + 1\right) = \lim\limits_{t\to\infty} \ln t = \infty$

Teljesen hasonlóan járunk el a $+\infty$-ben is.

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(x^2 + 1\right) = \infty$

Legyen $t = x^2 + 1$.

$\lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(x^2 + 1\right) = \lim\limits_{t\to\infty} \ln t = \infty$

Mivel a függvény páros, így előre tudhattuk, hogy a $-\infty$-ben és a $+\infty$-ben meg fog egyezni a határérték.

(e) Monotonitás és szélsőérték vizsgálata.

Deriváljuk a függvényt. Az összetett függvényekre vonatkozó szabályt használjuk.

$f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1} \cdot \left(x^2 + 1\right)' = \dfrac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \dfrac{2x}{x^2+1}$

Oldjuk meg az $f'(x) = 0$ egyenletet.

$\dfrac{2x}{x^2+1} = 0$

Csak a számlálót kell vizsgálnunk, így a $2x = 0$ egyenletet kapjuk, aminek nyilván $x = 0$ az egyetlen megoldása.

Készítsük el a szokásos táblázatot. A derivált nyilván negatív, ha $x < 0$, és pozitív, ha $0 < x$. Az $x = 0$ helyen a derivált előjele változik, s mivel negatívból pozitívba megy át, így ezen a helyen lokális minimum van. Töltsük ki egyből a teljes táblázatot.

	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x$
f'	$-$	0	$+$
f	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$

A minimum értékét megkapjuk, ha a függvénybe 0-t helyettesítünk. Mivel ezt már korábban megtettük, így tudjuk, hogy

$f(0) = 0$.

Nem csak áthalad tehát az origón a függvény hanem itt lokális minimuma is van. Ha végigondoljuk, akkor viszont ez a minimum nem csak lokális, hanem globális is, azaz a függvény a teljes értelmezési tartományán itt veszi fel a legkisebb értéket. Ez azért van így, mert a függvény minden $x < 0$ esetén csökken, és minden $0 < x$ esetén nő.

(f) Konvexitás vizsgálata, inflexiós pontok meghatározása.

Állítsuk elő a második deriváltat is. Most a törtekre vonatkozó szabályt kell alkalmaznunk.

$f''(x) = \dfrac{2 \cdot (x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$

Oldjuk meg az $f''(x) = 0$ egyenletet.

$\dfrac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} = 0$

Ismét csak a számlálóval kell foglalkoznunk, így a $2 - 2x^2 = 0$ egyenletet kapjuk.

Ebből az $x^2 = 1$ egyenlet következik, aminek megoldásai $x = \pm 1$.

A második derivált előjelének vizsgálatakor nyilván csak a számlálóval kell foglalkozni, hisz a nevező biztosan pozitív.

Mivel a $2 - 2x^2$ olyan másodfokú függvény, amelyben a főegyüttható negatív, így a két gyök között vesz fel pozitív, s a kisebb gyök előtt ill. a nagyobb gyök után negatív értékeket. Így az alábbiakat mondhatjuk.

Ha $x < -1$, akkor $f''(x) < 0$.

Ha $-1 < x < 1$, akkor $f''(x) > 0$.

Ha $1 < x$, akkor $f''(x) < 0$.

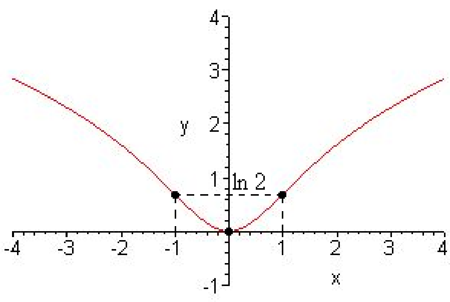
Készítsük most el a konvexitásról a táblázatot.

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\frown$	infl. p.	$\smile$	infl. p.	$\frown$

Határozzuk meg az infelexiós pontok második koordinátáit. Helyettesítsük a függvénybe az inflexiós pontok helyét, azaz a ± 1-et. Mivel a függvény páros, így nyilván meg fog egyezni a két helyen a függvény értéke.

$f(-1) = f(1) = \ln(1^2+1) = \ln 2 \approx 0.693$

(g) Grafikon rajzolása.



13. ábra. Az $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)$ függvény grafikonja

Az eddig megszerzett információk alapján vázlatosan megrajzolhatjuk a függény grafionját. Először jelöljük meg a nevezetes pontokat a koordináta rendszerben. Ilyenek a tengelymetszetek, a szélsőértékek, és az inflexiós pontok. Ezután felhasználva a határértékeket, a monotnitási és konvexitási viszonyokat vázoljuk a grafikont. Így az ábrán látható alakú grafikont kapjuk.

(h) Az értékkészlet meghatározása.

Az ábráról leolvasható, hogy 0 a legkisebb érték, melyet felvesz a függvény, s ennél minden nagyobb értéket felvesz. Így a függvény értékkészlete a következő:

$R_f = [0, \infty)$.

4. **Feladat:** Mekkorának kell választani egy 20 cm kerületű téglalap oldalait, hogy területe maximális legyen? Mekkora ez a maximális terület?

   Megoldás: Most egy szöveges szélsőérték feladatot kell megoldanunk. Az ilyen feladatokban nagyon gyakran geometriai feltételekkel meghatározott mennyiség legnagyobb, vagy legkisebb értékét keressük. Ekkor első lépésként fel kell írnunk, egy általunk választott független változó függvényében azt a mennyiséget, aminek a szélsőértékét keressük. Ezután meg kell határozni a feladat feltételeiből, hogy a független változó milyen értékeket vehet fel. Az így kapott, szöveg szerinti értelmezési tartományon kell aztán megkeresnünk a függvény szélsőértékeit a korábban megismert módon.

   Ezután térjünk át a konkrét feladat megoldására. Jelöljük a téglalap egyik oldalát x-szel, a másikat pedig y-nal. Ekkor a téglalap területe:

   $T = xy$.

Így felírva a területet, két változó mennyiség szerepel. Azonban a két változó között kapcsolat van, hiszen a kerület 20 cm. Írjuk fel a kerületet az oldalakkal.

$K = 20 = 2x + 2y$

Ebből az összefüggésből az egyik változó, pl. y kifejezhető.

$y = 10 - x$

Ha pedig ezután behelyettesítünk y helyére a területet leíró összefüggésben, akkor már egyváltozós függvényt kapunk. Ekkor már jelölhetjük is, hogy a terület az x változó függvénye.

$T(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$

Ezzel olyan függvényt kaptunk, ami a terület változását írja le az egyik oldal függvényében.

Határozzuk meg ezután, hogy milyen határok között vehet fel értékeket a változó. Nyilvánvaló, hogy az $x > 0$ feltételnek teljesülni kell, hiszen egy téglalap oldala csak pozitív lehet. Az x-nek azonban 10-nél kisebbnek is kell lennie, hiszen a téglalap másik oldala $10-x$, és ennek is pozitívnak kell lenni. Így a változóra a $0 < x < 10$ feltételt kapjuk. Ezen a halmazon kell keresnünk a fenti $T(x)$ függvény maximumát. Ehhez állítsuk elő a függvény deriváltját.

$T'(x) = 10 - 2x$

Megoldjuk a $T'(x) = 0$ egyenletet.

$10 - 2x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 5$

A deriváltnak a zérushelye a $(0, 10)$ intervallumba esik, így szóba jöhet, mint lehetséges maximum hely. Annak eldöntésére, hogy az $x = 5$ helyen valóban maximuma van-e a területnek, célszerű elkészíteni a szokásos táblázatot.

Az első sor kitöltésekor vegyük figyelembe a $0 < x < 10$ feltételt.

A derivált előjelének vizsgálatát immár nem részletezzük, mert nyilvánvaló, hogy melyik intervallumon pozitív ill. negatív a derivált.

	$0 < x < 5$	$x = 5$	$5 < x < 10$
T'	$+$	0	$-$
T	$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$

Az $x = 5$ helyen tehát lokális maximuma van a függvénynek. Sőt ez a $0 < x < 10$ feltétel mellett nem csak lokális maximum, hanem ezen a halmazon ez globális maximum is, hiszen $x < 5$ esetén végig nő a függvény, $x > 5$ esetén pedig végig csökken.

A terület tehát akkor lesz maximális, ha az egyik oldal 5 cm hosszúságú. Persze ekkor a másik oldal hossza is 5 cm, azaz a téglalap ekkor négyzet.

A maximális területet kell még meghatároznunk. Helyettesítsük be a maximum helyét a függvénybe.

$T(5) = 5(10 - 5) = 25$

A terület maximumának értéke tehát 25 cm^2.

Megjegyzés: Az ilyen feladatokban nem egyértelmű, hogy mit válasszunk független változónak. Jelen feladatban elég egyértelmű volt, hogy a téglalap egyik oldalát célszerű választani, de eljárhattunk volna más módon is. Mivel a két oldal összege 10, így az egyik oldal ugyanannyival rövidebb 5-nél, mint amennyivel a másik hosszabb 5-nél. Választhattuk volna változónak ezt a mennyiséget is, amivel az oldalak az 5-től eltérnek. Természetesen ekkor másik függvény írja le területet, és más a szöveg szerinti értelmezési tartomány is.

5. **Feladat:** Egy 10 cm sugarú, 20 cm magasságú egyenes körkúpba hengert írunk úgy, hogy forgástengelye megegyezik a kúp forgástengelyével, alapköre a kúp alapkörére esik, fedőköre pedig érinti a kúp palástját. Mekkora legyen a henger sugara és magassága, hogy térfogata maximális legyen? Mekkora a maximális térfogat?

   Megoldás: Jelöljük a henger sugarát r-rel, magasságát pedig h-val. Ekkor a henger térfogata, aminek szélsőértéke kell, hogy legyen, az alábbi módon írható fel:

   $V_{henger} = \pi r^2 h$

   Ebben két változó van, hiszen ha változik a henger sugara, akkor a magasság is változik. Amint az előző feladatban, így itt is összefüggést kell keresnünk a két változó között. Ehhez szükségünk lesz egy ábrára. Képzeletben vágjuk el a kúpot és a hengert egy a közös forgástengelyre illeszkedő síkkal, és a síkmetszetről készítsünk ábrát. Ezen metszeten a kúp nyilván egyenlő szárú háromszögnek látszik majd, a henger pedig egy olyan téglalapnak, amely ezen háromszögbe van írva úgy, hogy két csúcsa az alapra, másik két csúcsa pedig egy-egy szárra esik.

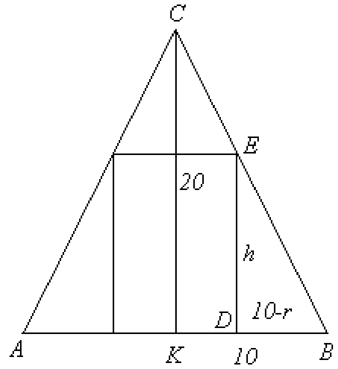
   Az ábráról nyilvánvaló, hogy a KBC derékszögű háromszög hasonló a DBE derékszögű háromszöghöz, így a két háromszögben megegyezik a befogók aránya. Írjuk ezt fel.

   $$\frac{h}{10 - r} = \frac{20}{10} = 2$$

   Fejezzük ki ebből h-t az r-rel.

   $h = 20 - 2r$

   Helyettesítsük be ezt a henger térfogatába, s így olyan függvényt kapunk, amiben már csak r lesz a változó.



14. ábra. A kúp és a henger metszete

$V(r) = \pi r^2(20 - 2r) = 20\pi r^2 - 2\pi r^3$

Ennek a függvénynek kell keresnünk a maximumát. A változóra nyilván a $0 < r < 10$ feltételnek kell teljesülni. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy szigorú egyenlőtlenségek vannak, mert egyenlőség esetén a henger elfajulna. Az $r = 0$ esetben egy szakaszá, a kúp magasságává válna a henger, az $r = 10$ esetben pedig egy körlappá, a kúp alapkörévé válna.

Ezután a szokott módon határozuk meg a szélsőértéket. Állítsuk elő a térfogatfüggvény deriváltját.

$V'(r) = 40\pi r - 6\pi r^2$

Oldjuk meg a $V'(r) = 0$ egyenletet. Ehhez célszerű a deriváltat szorzattá alakítani.

$V'(r) = 2\pi r(20 - 3r)$

Így nyilvánvaló, hogy az egyenletnek két megoldása van, az egyik $r = 0$, a másik pedig $r = \frac{20}{3}$. Az $r = 0$ nem felel meg a $0 < r < 10$ feltételnek, így csak a másik zérushellyel kell foglakoznunk. Készítsük el a megszokott táblázatot.

	$0 < r < \frac{20}{3}$	$r = \frac{20}{3}$	$\frac{20}{3} < r < 10$
V'	$+$	0	$-$
V	$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$

Látható, hogy az $r = \frac{20}{3}$ helyen lokális maximuma van a függvénynek, ami a $0 < r < 10$ feltétel mellett globális maximum is.

A henger térfogat tehát akkor maximális, ha $r = \frac{20}{3}$.

Ekkor a henger magassága a következő:

$h = 20 - 2 \cdot \frac{20}{3} = \frac{20}{3}$.

Végül a maximális térfogat:

$V_{max} = \pi \left(\frac{20}{3}\right)^2 \cdot \frac{20}{3} = \pi \frac{8000}{27} \approx 930.84$.

9. Taylor-polinomok

9.1. Alapfeladatok

1. **Feladat:** Írjuk fel az $f(x) = e^{-2x}$ függvény másodfokú Maclaurin-polinomját!

   Megoldás: A feladatot kétféle úton is megoldjuk. Az első megoldásban induljunk el a Maclaurin-polinomok definíciójából, miszerint egy függvény n-edfokú Maclaurin-polinomjának nevezzük, a 0 helyen vett n-edfokú Taylor-polinomját, mely az alábbi módon írható fel.

   $M_n f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!} f''(0) \cdot x^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \cdot x^n$

   Mivel feladatunkban másodfokú polinomot kell felírnunk, így $n = 2$, s így a polinomban csupán három tag fog szerepelni.

   $M_2 f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!} f''(0) \cdot x^2$

   Természetesen a konkrét Maclaurin-polinom felírásához meg kell határoznunk a képletben szereplő $f(0)$, $f'(0)$ és $f''(0)$ értékeket.

   Elsőként helyettesítsük a függvénybe a 0-t.

   $f(0) = e^{-2 \cdot 0} = e^0 = 1$

   Ezután állítsuk elő a függvény deriváltját, és határozzuk meg a derivált helyettesítési értékét is a 0 helyen.

   $f'(x) = e^{-2x} \cdot (-2) = -2e^{-2x}$

   A deriválás során ne feledkezzünk el arról, hogy összetett függvényt deriválunk, így a külső függvény deriválása után szoroznunk kell még a belső függvény deriváltjával is.

   Hajtsuk végre a 0 behelyettesítését.

   $f'(0) = -2e^{-2 \cdot 0} = -2e^0 = -2$

   Állítsuk elő a második deriváltat.

   $f''(x) = -2e^{-2x} \cdot (-2) = 4e^{-2x}$

   Helyettesítsük ebbe is a 0-t.

   $f''(0) = 4e^{-2 \cdot 0} = 4e^0 = 4$

   Utolsó lépésként helyettesítsük be a meghatározott $f(0)$, $f'(0)$ és $f''(0)$ értékeket a másodfokú Maclaurin-polinom képletébe. A behelyettesítés után határozzuk meg a faktoriálisok értékét, és egy-egy tagban szorozva a konstansokat, hozzuk egyszerűbb alakra a polinomot.

   $M_2 f(x) = 1 + \frac{1}{1!} \cdot (-2) \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot 4 \cdot x^2 = 1 + \frac{1}{1} \cdot (-2) \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x^2 =$
   $= 1 - 2x + 2x^2$

Nézzük ezután a feladat egy másik megoldását. Ekkor arra hivatkozunk, hogy az $g(x) = e^x$ függvénynek ismert a Maclaurin-sora.

$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots \quad x \in \mathbb{R}$

Ebből megkapjuk az e^x másodfokú Maclaurin-polinomját, ha a sorból elhagyjuk a másodfokúnál magasabb fokú tagokat.

$M_2g(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2$

Végül az e^x Maclaurin polinomjából úgy kapjuk meg az e^{-2x} Maclaurin-polinomját, hogy az x helyére a $-2x$-et helyettesítjük.

$M_2f(x) = 1 + \frac{1}{1!}(-2x) + \frac{1}{2!}(-2x)^2$

Az így kapott polinomban végezzük el az együtthatókon belül a műveleteket.

$M_2f(x) = 1 + \frac{1}{1}(-2x) + \frac{1}{2}4x^2 = 1 - 2x + 2x^2$

Természetesen így is ugyanazt az eredményt kaptuk, mint az előbb.

2. **Feladat:** Írjuk fel az $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ függvény másodfokú Maclaurin-polinomját!

   Megoldás: A feladatot most is kétféle úton oldjuk meg. Elsőként itt is elindulhatunk a másodfokú Maclaurin-polinom definíciójából.

   $M_2f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!}f''(0) \cdot x^2$

   Most is elő kell állítanunk az $f(0)$, $f'(0)$ és $f''(0)$ értékeket.

   Helyettesítsük be elsőként a függvénybe a 0-t.

   $f(0) = \sqrt[3]{0+1} = 1$

   Ezután állítsuk elő a függvény deriváltját. A deriválás előtt célszerű átalakítani a függvényt. A gyök helyett írjunk törtkitevős hatványt.

   $f(x) = \sqrt[3]{x+1} = (x+1)^{\frac{1}{3}}$

   Ebből az alakból már egyszerű a deriválás.

   $f'(x) = \frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}$

   Helyettesítsük be a deriváltba a 0-t.

   $f'(0) = \frac{1}{3}(0+1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$

   Állítsuk elő a második deriváltat is.

   $f''(x) = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)(x+1)^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9}(x+1)^{-\frac{5}{3}}$

   Határozzuk meg a második derivált 0 helyen vett helyettesítési értékét.

$f''(0) = -\frac{2}{9}(0+1)^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9}$

Végül a meghatározott $f(0)$, $f'(0)$ és $f''(0)$ értékeket helyettesítsük be a másodfokú Maclaurin-polinom képletébe. A behelyettesítés után hozzuk egyszerűbb alakra a polinomban az együtthatókat.

$M_2 f(x) = 1 + \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{3} \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) \cdot x^2 = 1 + \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) \cdot x^2 =$

$= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2$

Következzen ezután a feladat másik megoldása. Arra hivatkozunk, hogy az $g(x) = (1+x)^\alpha$ függvény Maclaurin-sorát ismerjük. Ezt nevezzük binomiális sornak.

$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots$

$|x| < 1, \alpha \in I\!R$

Ebből megkapjuk a másodfokú Maclaurin-polinomot, ha elhagyjuk a másodfokúnál magasabb fokó tagokat.

$M_2 g(x) = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2$

Ezután pedig már csak annyit kell tennünk, hogy α helyére $\frac{1}{3}$-ot helyettsítünk.

$M_2 f(x) = 1 + \frac{\frac{1}{3}}{1!}x + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}x^2$

Utolsó lépésként hozzuk egyszerűbb alakra a polinomban az együtthatókat.

$M_2 f(x) = 1 + \frac{\frac{1}{3}}{1}x + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{2}x^2 = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2$

Eredményünk természetesen megegyezik az előző megoldásban kapottal.

3. **Feladat:** Írjuk fel az $f(x) = \sin 2x$ függvény $a = \frac{\pi}{4}$ helyen vett másodfokú Taylor-polinomját!

Megoldás: A feladatot most is kétféle úton oldjuk meg. Elsőként megint definícióból indulunk el. Eszerint az $f(x)$ függvény a helyen vett n-edfokú Taylor-polinomja a következő:

$T_n f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}f'(a) \cdot (x-a) + \frac{1}{2!}f''(a) \cdot (x-a)^2 + \cdots +$

$+ \frac{1}{n!}f^{(n)}(a) \cdot (x-a)^n$

Mivel másodfokú polinom a kérdés, így $n = 2$.

$T_2f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}f'(a) \cdot (x-a) + \frac{1}{2!}f''(a) \cdot (x-a)^2$

Annyiban változik tehát csak a dolgunk az előzőekhez képest, hogy nem a 0 helyen kell meghatároznunk a függvény, valamint első és második deriváltjának értékét, hanem az $a = \frac{\pi}{4}$ helyen.

Helyettesítsünk először a függvénybe.

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

Állítsuk elő a függvény deriváltját. Figyeljünk oda, mert összetett függvényről van szó, ne felejtsünk el szorozni a belső függvény deriváltjával.

$f'(x) = \cos 2x \cdot 2 = 2\cos 2x$

Helyettesítsünk most a deriváltba is.

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 2\cos\frac{\pi}{2} = 0$

Ezután deriváljunk még egyszer.

$f''(x) = 2(-\sin 2x) \cdot 2 = -4\sin 2x$

A második deriváltba is helyettesítsük be az $a = \frac{\pi}{4}$ értéket.

$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = -4\sin\frac{\pi}{2} = -4$

Az előzőekben meghatározott $f(a)$, $f'(a)$ és $f''(a)$ értékeket írjuk be a Taylor-polinom képletébe, s egyben helyettesítsünk a helyére is.

$T_2f(x) = 1 + \frac{1}{1!} \cdot 0 \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2!} \cdot (-4) \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2$

Végül hozzuk egyszerűbb alakra a polinom együtthatóit.

$T_2f(x) = 1 + \frac{1}{2} \cdot (-4) \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 = 1 - 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2$

Lássuk ezután a feladat másik megoldását. Középiskolából ismert a $\sin\alpha = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$ összefüggés. Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$\sin 2x = \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Vezessük be az $u = x - \frac{\pi}{4}$ jelölést. Így $\sin 2x = \cos 2u$.

Mivel ha $x = \frac{\pi}{4}$, akkor $u = 0$, ezért a $\sin 2x$ függvény $a = \frac{\pi}{4}$ helyen vett másodfokú Taylor polinomja megegyezik a $\cos 2u$ függvény $u = 0$ helyen vett másodfokú Taylor polinomjával, azaz a másodfokú Maclaurin-polinommal.

Használjuk fel, hogy a $\cos x$ függvény Maclaurin-sora ismert.

$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots \quad x \in \mathbb{R}$

Hagyjuk el a másodfokúnál magasabb fokú tagokat, és írjunk x helyett $2u$-t. Így megkapjuk a $g(u) = \cos 2u$ függvény másodfokú Maclaurin-polinomját.

$M_2 g(u) = 1 - \frac{1}{2!}(2u)^2 = 1 - 2u^2$

Ezután pedig már csak annyit kell tennünk, hogy u helyére $x - \frac{\pi}{4}$-et helyettesítünk

$T_2 f(x) = 1 - 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2$

Eredményünk természetesen megegyezik az előző megoldásban kapottal.

4. **Feladat:** Írjuk fel az $f(x) = \ln 3x$ függvény $a = \frac{1}{3}$ helyen vett másodfokú Taylor-polinomját!

   Megoldás: Ezt a feladatot is kétféle módon fogjuk megoldani. Az első megoldás során most is a másodfokú Taylor-polinom definícióját használjuk fel.

   $T_2 f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}f'(a) \cdot (x - a) + \frac{1}{2!}f''(a) \cdot (x - a)^2$

   Határozzuk meg a polinomban szereplő, egyelőre ismeretlen $f(a)$, $f'(a)$ és $f''(a)$ értékeket.

   Helyettesítsük elsőként a függvénybe az $a = \frac{1}{3}$-ot.

   $f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\left(3 \cdot \frac{1}{3}\right) = \ln 1 = 0$

   Deriváljuk a függvényt.

   $f'(x) = \frac{1}{3x} \cdot 3 = \frac{1}{x}$

   Helyettesítsünk be a deriváltban is a helyére $\frac{1}{3}$-ot.

   $f'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

   Állítsuk elő a második deriváltat.

   $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$

   Helyettesítsük a második deriváltba is az $a = \frac{1}{3}$-ot.

   $f''(x) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = -9$

Majd a Taylor-polinom képletében helyettesítsünk a, $f(a)$, $f'(a)$ és $f''(a)$ helyére.

$T_2f(x) = 0 + \frac{1}{1!} \cdot 3 \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2!} \cdot (-9) \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right)^2$

Végül írjuk egyszerűbb alakban a polinom együtthatóit.

$T_2f(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right) - \frac{9}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$

Nézzük ezután a feladat másik megoldását. Most alakítsuk át a függvényt, s írjuk a következő alakban:

$f(x) = \ln 3x = \ln(1 + 3x - 1) = \ln\left(1 + 3\left(x - \frac{1}{3}\right)\right).$

Ha pedig bevezetjük az $u = x - \frac{1}{3}$ jelölést, akkor ez még tovább alakítható.

$f(x) = \ln 3x = \ln(1 + 3u)$

Azért kedvezőbb ez az alak, mert a $\ln(1 + x)$ függvény Maclaurin-sora ismert, és ha $x = \frac{1}{3}$, akkor $u = 0$. Ennek következtében a $\ln 3x$ függvény $a = \frac{1}{3}$ helyen vett másodfokú Taylor polinomja megegyezik a $\ln(1+3u)$ függvény $u = 0$ helyen vett másodfokú Taylor polinomjával, azaz a másodfokú Maclaurin-plonimmal.

Induljunk el tehát a $\ln(1 + x)$ függvény Maclaurin-sorából.

$\ln(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots \quad |x| < 1$

Hagyjuk el a másodfokúnál magasabb fokú tagokat, és írjunk x helyett $3u$-t. Így megkapjuk a $g(u) \ln(1+3u)$ függvény másodfokú Maclaurin-polinomját.

$M_2g(u) = 3u - \frac{1}{2}(3u)^2 = 3u - \frac{9}{2}u^2$

Ha ebben u helyére $x - \frac{1}{3}$-ot helyettesítünk, akkor pedig megkapjuk a keresett Taylor polinomot.

$T_2f(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right) - \frac{9}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$

Természetesen ugyanazt kaptuk eredményül, mint az első megoldásban.

5. **Feladat:** Melyik az a harmadfokú polinom, melyre a következők igazak:

   $p(0) = 3, \quad p'(0) = -1, p''(0) = -6, p'''(0) = 12?$

   Megoldás: Ismert egy függvény és deriváltjainak értéke a 0 helyen, ezért a Maclaurin-sor felírásából indulhatunk ki, mely egy $f(x)$ függvény esetén a következő:

$f(0) + \frac{1}{1!}f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!}f''(0) \cdot x^2 + \frac{1}{3!}f''(0) \cdot x^3 + \cdots$

Mivel most egy polinomról van szó, így őt előállítja a Maclaurin-sora. Mivel pedig a polinom harmadfokú, így negyedik és annál magasabb rendű deriváltjai azonosan 0-val egyenlőek. Ez azt jelenti, hogy a Maclaurin-sorban a haramadfokúnál magasabb fokú tagok nem szerepelnek, azaz a harmadfokú Maclaurin-polinomot felírva, megkapjuk a keresett polinomot. Ezt egyenletben a következő módon írhatjuk:

$p(x) = p(0) + \frac{1}{1!}p'(0) \cdot x + \frac{1}{2!}p''(0) \cdot x^2 + \frac{1}{3!}p'''(0) \cdot x^3.$

Ide már csak be kell helyettesítenünk a függvény és a deriváltak megadott értékeit.

$p(x) = 3 + \frac{1}{1!} \cdot (-1) \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot (-6) \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot 12 \cdot x^3$

Végezzük el az együtthatókban a műveleteket.

$p(x) = 3 - x - 3x^2 + 2x^3$

Ha pedig csökkenő fokszám szerint írjuk a tagokat, akkor

$p(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 3.$

9.2. Összetett feladatok

1. **Feladat:** Írjuk fel az $f(x) = x^3 - 5x^2 + x + 20$ függvény $a = 3$ helyen vett Taylor-sorát!

   Megoldás: Induljunk ki a Taylor-sor definíciójából, mely

   $f(a) + \frac{1}{1!}f'(a) \cdot (x-a) + \frac{1}{2!}f''(a) \cdot (x-a)^2 + \frac{1}{3!}f''(a) \cdot (x-a)^3 + \cdots$

   Mivel egy polinom Taylor-sorát írjuk majd fel, így a sor biztosan elő fogja állítani a függvényt, azaz $f(x)$ egyenlő lesz a Taylor-sorral, s a sorban a helyére 3-at kell helyettesítenünk.

   $f(x) = f(3) + \frac{1}{1!}f'(3) \cdot (x-3) + \frac{1}{2!}f''(3) \cdot (x-3)^2 + \frac{1}{3!}f''(3) \cdot (x-3)^3 + \cdots$

   A konkrét Taylor-sort akkor tudjuk felírni, ha meghatározzuk az $f(3)$, $f'(3)$, $f''(3) \cdots$ értékeket.

   Elsőként helyettsítsük a függvénybe a 3-at.

   $f(3) = 3^3 - 5 \cdot 3^2 + 3 + 20 = 5$

   Deriváljuk a függvényt.

   $f'(x) = 3x^2 - 10x + 1$

   Határozzuk meg a derivált értékét az $x = 3$ helyen.

   $f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 10 \cdot 3 + 1 = -2$

   Állítsuk elő a második deriváltat.

$f''(x) = 6x - 10$

Helyettesítsük ebbe is a 3-at.

$f''(3) = 6 \cdot 3 - 10 = 8$

Deriváljunk még egyszer.

$f'''(x) = 6$

A harmadik derivált egy konstans függvény, így nyilván a 3 helyen is ezt a konstanst veszi fel, azaz

$f'''(3) = 6.$

Mivel a harmadrendű derivált konstans, így negyed és annál magasabb rendű deriváltak már azonosan egyenlőek zérussal. Ez azt jelenti, hogy a Taylor-sor most véges sok tagból áll, hiszen csak az első négy tag különbözik 0-tól.

Helyettesítsük be a meghatározott értékeket a Taylor-sor képletébe.

$$f(x) = 5 + \frac{1}{1!} \cdot (-2) \cdot (x-3) + \frac{1}{2!} \cdot 8 \cdot (x-3)^2 + \frac{1}{3!} \cdot 6 \cdot (x-3)^3$$

Az együtthatókon belül végezzük el a műveleteket.

$f(x) = 5 - 2(x-3) + 4(x-3)^2 + (x-3)^3$

Amint látható, a Taylor-sor felírásával úgy alakult át a polinom, hogy x hatványai helyett $x-3$ hatványai szerepelnek benne. Ha elvégeznénk a Taylor-sorban a hatványozásokat, és összevonnánk utána az azonos fokszámú tagokat, akkor visszakapnánk az eredeti polinomot. Ezzel ellenőrizhetnénk megoldásunk helyességét.

Megjegyzés: Minden polinom Taylor-sora véges, hisz ha a polinom n-edfokú, akkor az $n+1$-edik és annál magasabbrendű deriváltak azonosan nullával egyenlőek. Ezért egy n-edfokú polinom Taylor-sorában legfeljebb $n+1$ nullától különböző tag lehet. A Taylor sor felírása úgy alakítja át a polinomot, hogy benne x hatványai helyett $x-a$ hatványai fognak szerepelni. Ha $a = 0$, azaz Maclaurin-sort írunk fel, akkor $x - a = x$, így továbbra is x hatványai szerepelnek, azaz változatlan alakban marad a polinom. Ez azt jelenti, minden polinom Maclaurin-sora maga a polinom.

2. **Feladat:** Hogyan határozhatjuk meg $\dfrac{1}{\sqrt[10]{e}}$ közelítő értékét, ha csak négy alapműveletes számológépünk van?

   Megoldás: Mivel $\dfrac{1}{\sqrt[10]{e}} = e^{-0.1}$, ezért a feladatot úgy is fogalmazhatjuk, hogy adjuk meg közelítőleg az $f(x) = e^x$ függvény $x = -0.1$ helyen vett helyettesítési értékét. Mivel a -0.1 közel van nullához, ezért az $f(x) = e^x$ függvény Maclaurin-sorából határozhatunk meg közelítő értéket. Ezen függvény Maclaurin sora a következő:

$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$

Ebben kell x helyére -0.1-et helyettesítenünk.

Mivel a sornak végtelen sok tagja van, így nem tudunk a teljes sorba helyettesíteni, hanem csak a sor elejéről veszünk figyelembe véges sok tagot. Így tulajdonképpen valamelyik Maclaurin-polinomba helyettesítünk. Minél több tagot veszünk figyelembe, a közelítő érték annál pontosabb lesz.

Ha pl. másodfokú Maclaurin-polinomba helyettesítünk, akkor a következőt kapjuk:

$e^{-0.1} \approx 1 + \frac{1}{1!} \cdot (-0.1) + \frac{1}{2!} \cdot (-0.1)^2 = 0.905.$

Ha negyedfokú polinomba helyettesítünk, akkor pedig az alábbi értéket kapjuk:

$e^{-0.1} \approx 1 + \frac{1}{1!} \cdot (-0.1) + \frac{1}{2!} \cdot (-0.1)^2 + \frac{1}{3!} \cdot (-0.1)^3 + \frac{1}{4!} \cdot (-0.1)^4 =$
$= 0.9048375.$

Ha nem csak a négy alapműveletet ismerő számolódépünk van, akkor egyetlen lépésben a következő közelítő értéket kapjuk:

$e^{-0.1} \approx 0.904837418.$

Amint látható, a negyedfokú polinomból kapott érték már 6 tizedesjegyre pontos. Ha ennél is pontosabb értékre van szükség, további tagok figyelembe vételével tetszőleges pontosság érhető el.

Felvetődik annak kérdése, hogy ha előre megadott pontossággal szeretnénk megkapni a közelítő értéket, akkor hány tagot kell figyelembe vennünk. Ezt a Lagrange-féle maradéktag becslésével tudjuk meghatározni. Ha annak abszolút értéke már a megengedett pontosságnál kisebb, akkor megfelelő közelítőértéket kapunk. Ha pl. 4 tizedesjegy pontosság elérése a feladat, akkor a Lagrange-féle maradéktag abszolút értékének 0.0001-nél kisebbnek kell lenni. Így olyan egyenlőtlenséget fogunk kapni, amiben a tagok szám, azaz n lesz az ismeretlen.

Ha n-edfokú polinomot írunk fel, akkor a Lagrange-féle maradéktag a következő:

$R_{n+1}(f, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$

Írjuk fel az egyenlőtlenséget a feladat adataival.

$|R_{n+1}(e^x, -0.1)| = \left| \frac{e^{\xi} \cdot (-0.1)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} \cdot (0.1)^{n+1} < 0.0001$

Az egyenlőtlenségben szereplő ξ a $[-0.1, 0]$ intervallumnak eleme.

Mivel ezen ξ értékét nem ismerjük, ezért e^ξ értékét felülről becsüljük. Az exponenciális függvény szigorúan monoton nő, így legnagyobb értékét az intervallum jobb oldali végpontjában veszi fel. Ebből $e^\xi \le e^0 = 1$ következik.

Ezután az egyenlőtlenség a következő:

$$\frac{e^\xi}{(n+1)!} \cdot (0.1)^{n+1} \le \frac{1}{(n+1)!} \cdot (0.1)^{n+1} < 0.0001$$

Mivel az $\dfrac{1}{(n+1)!} \cdot (0.1)^{n+1} < 0.0001$ egyenlőtlenség már $n = 3$ esetén igaz, ez azt jelenti, hogy a 4 tizedesjegy pontosság elérhető, ha harmadfokú Maclaurin-polinomba helyettesítünk.

3. **Feladat:** Ha ismerjük az $\ln 10 \approx 2.302585$ közelítő értéket, és van egy négy alapműveletes számológépünk, akkor hogyan határozhatjuk meg $\ln 8$ közelítő értékét?

   Megoldás: Ismerjük egy olyan függvény Maclaurin-sorát, amelyben logaritmus szerepel, ez az $f(x) = \ln(x+1)$. Tudjuk, hogy

   $$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots$$

   Egyszerű lenne itt $x = 7$-et helyettesíteni, de ezt nem tehetjük meg, mert ez a sor csak akkor konvergens, ha $|x| < 1$. Úgy segíthetünk magunkon, ha a $\ln 8$-at más alakban írjuk fel.

   $$\ln 8 = \ln(10-2) = \ln\left(10 \cdot (1-0.2)\right) = \ln 10 + \ln(1-0.2)$$

   Mivel $\ln 10$ értékét ismerjük, így lényegében az

   $$\ln 0.8 = \ln(1-0.2) = \ln(1+(-0.2))$$

   közelítő értékét kell meghatároznunk. Ezt a $\ln(1+x)$ Maclaurin-sorából kaphatjuk $x = -0.2$ helyettesítéssel. A konkrét közelítő értéket negyedfokú polinomból számoljuk ki.

   $$\ln(1+(-0.2)) \approx -02 - \frac{1}{2}\cdot(-0.2)^2 + \frac{1}{3}\cdot(-0.2)^3 - \frac{1}{4}\cdot(-0.2)^4 \approx -0.22307$$

   Ezután térjünk vissza az eredeti kérdéshez.

   $$\ln 8 = \ln 10 + \ln 0.8 \approx 2.30258 - 0.22307 = 2.07951$$

   Megjegyzés: Egy tudományos funkciókkal is rendelkező számológéppel a $\ln 8 \approx 2.079441542$ közelítő értéket kapjuk. Bár az előző feladathoz hasonlóan most is negyedfokú polinomból számoltunk közelítő értéket, mégis azt látjuk, hogy itt csak 3 tizedesjegy lett pontos. Ez érthető, mert a pontosságot nagy mértékben befolyásolja $|x|$ nagysága, hiszen minél nagyobb az $|x|$, annál lassabban tartanak zérushoz a sor tagjai, s így annál lassabb a konvergencia. Mivel most $|x|$ kétszer akkora volt, mint az előző feladatban, ezért kisebb pontosság volt várható. Természetesen a pontosságon javíthatunk, ha a sor több tagját vesszük figyelembe.

4. **Feladat:** Hogyan határozhatjuk meg $\frac{1}{\sqrt{6}}$ közelítő értékét egy négy alapműveletes számológép segítségével?

Megoldás: Mivel $\frac{1}{\sqrt{6}} = 6^{-\frac{1}{2}}$, ezért a binomiális sorból indulhatunk ki, mely szerint

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} \cdot x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \cdot x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} \cdot x^3 + \cdots$$

Nyilvánvaló, hogy most α helyére $\frac{1}{2}$ kerül majd. Egyszerűnek tűnne, hogy az x helyére pedig kerüljön 5, azonban ez nem járható út, mert a sor csak $|x| < 1$ esetén konvergens. Mint az előző feladatban, most is írjuk más alakban a közelítendő számot.

$$\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot \frac{6}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2} \cdot (1.5)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot (1+0.5)^{-\frac{1}{2}}$$

Így tulajdonképpen az $(1.5)^{-\frac{1}{2}}$ közelítő értékét kell meghatároznunk, majd azt $\frac{1}{2}$-del szorozni. Így már nincs baj a konvergenciával, hisz ha $1 + x = 1.5$, akkor $x = 0.5$, s ez eleget tesz az $|x| < 1$ feltételnek, ami konvergenciához szükséges. A közelítő értéket most harmadfokú polinomból számoljuk ki.

$$(1.5)^{-\frac{1}{2}} = (1+0.5)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{(-0.5)}{1!} \cdot 0.5 + \frac{(-0.5)(-0.5-1)}{2!} \cdot (0.5)^2 + \frac{(-0.5)(-0.5-1)(-0.5-2)}{3!} \cdot (0.5)^3 = 0.8046875$$

Majd térjünk vissza a eredeti kérdéshez.

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \approx \frac{1}{2} \cdot 0.8046875 = 0.40234375$$

Ha egy jobb számológép is rendelkezésünkre áll, akkor azzal az $\frac{1}{\sqrt{6}} \approx 0.40824829$ közelítő értéket kapjuk. Látható, hogy az általunk számolt közelítés elég pontatlan, ami annak tudható be, hogy csak harmadfokú közelítést használtunk, és $|x|$ is nagyobb volt, mint az eddigi feladatokban.

Megjegyezzük, hogy a feladatot némileg máshogyan is megoldhattuk volna, ha a közelítendő számot másképp alakítjuk át. Tekintsük a következő átalakítást.

$$\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{9 \cdot \frac{6}{9}}} = \frac{1}{\sqrt{9}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Ezután ugyanúgy járhatnánk el, mint a fenti megoldásban, csak most x helyére $-\frac{1}{3}$-ot kellene helyettesíteni. Ez bizonyos szempontból még kedvezőbb is lenne, hiszen így $|x|$ kisebb, ezáltal jobb közelítést várhatnánk.

10. Határozatlan integrál

10.1. Alapfeladatok

1. **Feladat:** Határozzuk meg az alábbi határozatlan integrált!

$$\int 3x^2 + \sin x - \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} dx$$

Megoldás: Az integrálandó függvényen belül összeadás illetve kivonás művelete szerepel, ilyenkor tagonként integrálhatunk, azaz

$$\int 3x^2 + \sin x - \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}\, dx = \int 3x^2 dx + \int \sin x dx - \int \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} dx.$$

Az első integrálban szereplő konstans szorzó kiemelhető az integrál elé.

$$\int 3x^2 + \sin x - \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}\, dx = 3\int x^2 dx + \int \sin x dx - \int \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} dx.$$

Így már csak alapintegrálok szerepelnek, melyeket egyszerűen behelyettesíthetünk.

Az első részben az $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c,\ \alpha \in I\!R \setminus \{-1\}$ alapintegrálra hivatkozunk, mely azt mondja ki, hogy hatványfüggvény integrálásakor a kitevőt eggyel megnöveljük, s az új kitevővel osztunk. Kivétel a -1-edik hatvány, azaz a reciprok.

A második tag esetén arra hivatkozunk, hogy $\int \sin x dx = -\cos x + c.$

A harmadik tag esetén pedig arra, hogy $\int \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x} dx = \mathrm{th}\, x + c$

Ezek a után a feladat eredménye a következő:

$$\int 3x^2 + \sin x - \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}\, dx = 3\left(\frac{x^3}{3}\right) + (-\cos x) - \mathrm{th}\, x + c =$$

$$= x^3 - \cos x - \mathrm{th}\, x + c$$

2. **Feladat:** Integráljuk az $f(x) = \sqrt[5]{x \cdot \sqrt{x}}$ függvényt.

Megoldás: Először alakítsuk át az integrálandó függvényt. A gyökök helyett írjunk inkább törtkitevős hatványokat.

$$f(x) = \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}$$

Végezzük el e zárójelen belül a szorzást.

$$f(x) = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}$$

Egy hatványt tovább hatványozunk. Ilyenkor a kitevők szorzódnak.

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{5}} = x^{\frac{3}{10}}$$

Így már csak egyetlen hatványt kell integrálnunk. Az előző feladatban leírtak szerint ekkor eggyel megnöveljük a kitevőt, s az új kitevővel osztunk.

$$\int f(x)dx = \int x^{\frac{3}{10}} = \frac{x^{\frac{13}{10}}}{\frac{13}{10}} + c = \frac{10}{13}x^{\frac{13}{10}} + c$$

Az eredményt nem csak ilyen alakban írhatjuk, hisz egy törtkitevős hatvány gyökös kifejezéssé alakítható. Ekkor eredményünk alakja a következő:

$$\int f(x)dx = \frac{10}{13}\sqrt[10]{x^{13}} + c$$

3. **Feladat:** $\int \sqrt[3]{x}\left(x^2 - 3x\right)dx =$

Megoldás: Függvények szorzatát kell integrálnunk, amire nincsen általános integrálási szabály. Ezért próbáljuk meg úgy átalakítani a függvényt, hogy ne szerepeljen benne szorzás. Írjunk a köbgyök helyett törtkitevős hatványt, és bontsuk fel a zárójelet.

$$\int \sqrt[3]{x}\left(x^2 - 3x\right)dx = \int x^{\frac{1}{3}}\left(x^2 - 3x\right)dx =$$

$$\int x^{\frac{1}{3}} \cdot x^2 - 3x^{\frac{1}{3}} \cdot x\, dx = \int x^{\frac{7}{3}} - 3x^{\frac{4}{3}}\, dx$$

Így sikerült elérnünk, hogy nem szerepel már szorzás az integrandusban, hanem csak különbség. Így már egyszerűen tagonként végezhetjük el az integrálást. A második tagból egyben ki is emelhetjük a konstans szorzót

$$\int x^{\frac{7}{3}} - 3x^{\frac{4}{3}}\, dx = \int x^{\frac{7}{3}}\, dx - 3\int x^{\frac{4}{3}}\, dx$$

Ezután már csak két hatványfüggvényt kell integrálnunk.

$$\int x^{\frac{7}{3}}\, dx - 3\int x^{\frac{4}{3}}\, dx = \frac{x^{\frac{10}{3}}}{\frac{10}{3}} - 3\frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} + c = \frac{3}{10}x^{\frac{10}{3}} - \frac{9}{7}x^{\frac{7}{3}} + c$$

Az eredményt írhatjuk más alakban is.

$$\frac{3}{10}\sqrt[3]{x^{10}} - \frac{9}{7}\sqrt[3]{x^7} + c$$

4. **Feladat:** $\int \frac{2x^3 + 5x}{\sqrt{x}}\, dx$

Megoldás: Most függvények hányadosa szerepel az integrandusban, amire ugyanúgy nincs általánosan integrálási szabály, mint a függvények szorzatára. Most is tudunk azonban alakítani a függvényen. A számlálóban levő összeg tagjait külö-külön oszthatjuk a nevezővel, s a gyököt pedig hatvány alakban írhatjuk.

$$\int \frac{2x^3+5x}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{2x^3}{\sqrt{x}} + \frac{5x}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{2x^3}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{5x}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx$$

Végezzük el a két osztást. (Most a kitevők kivonódnak.)

$$\int \frac{2x^3}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{5x}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx = \int 2x^{\frac{5}{2}} + 5x^{\frac{1}{2}}\,dx$$

Íg sikerült elérnünk, hogy csak két hatványfüggvény összegét kell integrálnunk. Ezt a korábbiakban ismertetett módon hajtjuk végre. Nem részletezzük már, hogy az összeget tagonként integrálhatjuk, és konstans szorzó kiemelhető az integrálás során.

$$\int 2x^{\frac{5}{2}} + 5x^{\frac{1}{2}}\,dx = 2\frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + 5\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{4}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$$

Az eredményt írhatjuk gyökös formában is.

$$\frac{4}{7}\sqrt{x^7} + \frac{10}{3}\sqrt{x^3} + c$$

5. **Feladat:** $\displaystyle\int \sin(3x+\pi)\,dx =$

Megoldás: Az integrandusunk most egy olyan összetett függvény, amelynek belső függvénye elsőfokú polinom, vagy más szóval lineáris. Ha egy ilyen függvény külső függvényének ismerjük a határozatlan integrálját, akkor az összetett fügvényt is tudjuk integrálni. A szabály, melyet ilyen esetekben alkalmazhatunk, a következő:

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c, \quad a, b \in I\!R, \text{ ahol } \int f(x) = F(x) + c$$

teljesül.

Szövegben ezt úgy mondhatjuk, hogy ilyenkor vesszük a külső függvény integrálját, összetett függvényt alkotunk az eredeti lineáris belső függvénnyel, és ezt osztjuk a lineáris belső függvényből x együtthatójával.

Jelen feladatban a következőt láthatjuk.

A külső függvény $\sin x$. Ennek integrálja:

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c.$$

A belső függvény $3x+\pi$, ez felel meg $ax+b$-nek, azaz $a=3$ és $b=\pi$.

Alkalmazva a szabályt, az alábbi eredményt kapjuk:

$$\int \sin(3x+\pi)\,dx = \frac{-\cos(3x+\pi)}{3} + c$$

Az ilyen feladatokban általában nem szükséges sok átalakítást végrehajtani az integranduson, a hangsúly azon van, hogy felismerjük, ilyen típusú összetett függvényünk van. Ha ez sikerült, akkor már könnyű alkalmazni a szabályt.

6. **Feladat:** $\displaystyle\int \frac{1}{5x-8}\,dx =$

Megoldás: Az integranduson megint azt ismerhetjük fel, hogy olyan összetett függvény, melynek belső függvénye elsőfokú.

A külső függvény most nyilván az $\frac{1}{x}$. Ennek integrálja a következő:

$\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c.$

Itt szeretnénk felhívni a figyelmet arra, hogy bár az $\frac{1}{x}$ is hatványfüggvény, hiszen $\frac{1}{x} = x^{-1}$, de integrálása másképp történik, mint a többi hatványfüggvénynek. Az integrálásnál a -1-edik hatvány kivételt alkot.

A belső függvény most $5x-8$, tehát $a = 5$ és $b = -8$.

Alkalmazva az $\displaystyle\int f(ax+b)\,dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c$ szabályt, az alábbi eredményt kapjuk:

$\displaystyle\int \frac{1}{5x-8}\,dx = \frac{\ln|5x-8|}{5} + c$

7. **Feladat:** $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 5x}\,dx =$

Megoldás: Ha most deriválnunk kellene, akkor azt mondanánk, jelen esetben egy többszörösen összetett függvényünk van. Külső függvény az $\frac{1}{x^2}$, középső a $\cos x$, és belső az $5x$. Nem muszály azonban ennyire felbontanunk a függvényt, sőt integrálásnál nem is célszerű. Az előző felbontásban szereplő belső függvény, az $5x$, egy lineáris függvény. Csak annyit kell tennünk, hogy amit az előbb külső és középső függvénynek tekintettünk, azt nem bontjuk fel, hanem egyben tekintjük külső függvénynek. Azaz most $\frac{1}{\cos^2 x}$ lesz a külső függvény. Azért célszerű ez a felbontás, mert így a külső függvény egy alapintegrál. Tudjuk, hogy

$\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c.$

Amint már említettük, a belső függvény $5x$, azaz $a = 5$ és $b = 0$.

Alkalmazva a korábban ismertetett szabályt, az alábbi eredményt kapjuk:

$\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 5x}\,dx = \frac{\operatorname{tg} 5x}{5} + c.$

8. **Feladat:** $\displaystyle\int \sqrt[3]{4x+7}\,dx =$

Megoldás: Az integrandus ezen esetben is olyan összetett függvény, melynek belső függvénye elsőfokú.

A külső függvény nyilván a $\sqrt[3]{x}$, melynek integrálja:

$$\int \sqrt[3]{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{3}}\, dx = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c$$

A belső függvény $4x + 7$, tehát $a = 4$ és $b = 7$.

Alkalmazva az előzőekben ismertetett szabályt, a következőt kapjuk:

$$\int \sqrt[3]{4x+7}\, dx = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt[3]{(4x+7)^4}}{4} + c = \frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x+7)^4} + c$$

9. **Feladat:** $\displaystyle\int \frac{1}{1+9x^2}\, dx =$

Megoldás: A függvény ezen alakjából nem igazán látszik az, hogy lineáris belső függvénnyel rendelkező összetett függvényről van szó, de ha egy kicsit alakítunk rajta, akkor már igen. Írjuk a $9x^2$-et $(3x)^2$ formában. Így az integrál a következő alakot ölti:

$$\int \frac{1}{1+9x^2}\, dx = \int \frac{1}{1+(3x)^2}\, dx$$

Így már látható, hogy a külső függvény most $\dfrac{1}{1+x^2}$. Ez egy alapintegrál:

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \operatorname{arctg} x + c.$$

A belső függvény $3x$, azaz $a = 3$ és $b = 0$.

Ezután az eredmény a következő:

$$\int \frac{1}{1+9x^2}\, dx = \int \frac{1}{1+(3x)^2}\, dx = \frac{\operatorname{arctg} 3x}{3} + c$$

A feladatból jól látszik, hogy az alapintegrálok biztos ismerete nagyon fontos. Csak akkor jöhet rá valaki, hogy milyen alakban kell írni az integrandust, ha tisztában azzal, hogy $\dfrac{1}{1+x^2}$ egy alapintegrál. Ezután már könnyű észrevenni ezen alapintegrál, és az integrandus közötti hasonlóságot.

10. **Feladat:** $\displaystyle\int \frac{1}{4+x^2}\, dx =$

Megoldás: A feladat nagyon hasonlít az előzőre. Az integrandus alig különbözik az $\dfrac{1}{1+x^2}$ alapintegráltól, de most más helyen tér el attól, mint az előző feladatban. Elsőként azt lenne jó elérnünk, hogy a nevezőben a 4 helyén 1 álljon, ezért célszerű kiemelni $\dfrac{1}{4}$-et.

$$\int \frac{1}{4+x^2}\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\dfrac{x^2}{4}}\, dx$$

Ezzel elértük, hogy az integrandus lényegében olyan, mint az előző feladatban. Írjunk ezután az $\frac{x^2}{4}$ helyett $\left(\frac{x}{2}\right)^2$-t, amit $\left(\frac{1}{2}x\right)^2$ formában is írhatunk.

$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}x\right)^2}\,dx$$

Így már egyértelmű, hogy megint olyan összetett függvényt kell integrálnunk, amiben a belső függvény lineáris, s amelyben $\frac{1}{1+x^2}$ a külső függvény. Ennek integrálja már korábban is szerepelt:

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + c.$$

A belső függvény most $\frac{1}{2}x$, azaz $a = \frac{1}{2}$ és $b = 0$.

Alkalmazzuk újra a korábban ismertetett szabályt, azaz integráljuk a külső függvényt, alkossunk összetételt a belső függvénnyel, és osszunk a belső függvényből x együtthatójával. Így eredményünk az alábbi lesz:

$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}x\right)^2}\,dx = \frac{1}{4}\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + c$$

11. **Feladat:** $\int \left(x^2+5\right)^6 \cdot 2x\,dx =$

Megoldás: Az integrandusban most azt ismerhetjük fel, hogy egy függvény hatványa áll benne megszorozva a hatványozott függvény deriváltjával. Úgy is mondhatjuk, hogy az integrandus $f^{\alpha}(x)\cdot f'(x)$ típusú. Az ilyen függvények integrálására is van egy könnyen alkalmazható szabályunk:

$$\int f^{\alpha}(x)\cdot f'(x)\,dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c, \text{ ahol } \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}.$$

Ebben a feladatban nyilván $f(x) = x^2+5$ az a függyvény, aminek a hatványa szerepel, s mellete ott áll szorzóként a deriváltja, hiszen $\left(x^2+5\right)' = 2x$.

A szabály azt mondja ki, hogy ilyen esetben a függény 1-gyel magasabb kitevőjű hatványa lesz az integrál, elosztva ezen 1-gyel nagyobb kitevővel. Így az alábbi eredményt kapjuk:

$$\int \left(x^2+5\right)^6 \cdot 2x\,dx = \int \left(x^2+5\right)^6 \cdot \left(x^2+5\right)'\,dx = \frac{\left(x^2+5\right)^7}{7} + c$$

Látható, hogy a megoldás során nem volt szükség az integrandus hosszas átalakítására. Az volt a fontos, hogy felismerjük, az integrandus típusát. Erre akkor van csak esélyünk, ha rendelkezünk az alapderiváltak biztos ismeretével.

12. **Feladat:** $\int \left(x^2-1\right)^3 \cdot x\,dx =$

Megoldás: Az előző feladat megoldásának mintájára azt mondhatjuk, hogy legyen $f(x) = x^2 - 1$, hiszen ennek a függvénynek hatványa szerepel az integrandusban. A gondot az okozza, hogy ennek deriváltja $(x^2-1)' = 2x$, és nem pontosan ez szerepel a függvény hatványa mellett szorzóként, hanem csak x. Ezen azonban segíthetünk, ha az integrandust szorozzuk is, és osztjuk is 2-vel. Így elérjük, hogy a függvény hatványa mellett a hatványozott függvény deriváltja álljon.

$$\int \left(x^2-1\right)^3 \cdot x\,dx = \int \frac{(x^2-1)^3 \cdot 2x}{2}\,dx =$$

Mivel konstans szorzó kiemelhtő az integrálból, ezért a 2-vel osztás helyett célszerűbb $\frac{1}{2}$-del szorzást írni az integrál elé. Így az integrandus egyértelműen $f^{\alpha}(x) \cdot f'(x)$ típusú.

$$\int \frac{(x^2-1)^3 \cdot 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int \left(x^2-1\right)^3 \cdot 2x\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \left(x^2-1\right)^3 \cdot \left(x^2-1\right)'\,dx$$

Alkalmazzuk az előző feladatban ismertetett szabályt.

$$\frac{1}{2}\int \left(x^2-1\right)^3 \cdot \left(x^2-1\right)'\,dx = \frac{1}{2}\frac{(x^2-1)^4}{4} + c = \frac{1}{8}\left(x^2-1\right)^4 + c$$

A megoldásból látható, hogy ha az integrandus egyik tényezője egy függvény hatványa, a másik pedig ezen hatványozott függvény deriváltjának szám szorosa, akkor kialakítható az $f^{\alpha}(x) \cdot f'(x)$ típusú integrandus. Ilyenkor megfelelő konstanssal szorzunk is és osztunk is, hogy a hatványozott függvény deriváltja jelenjen meg. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy ilyet csak akkor tehetünk, ha a hatványozott függvény deriváltjától csak konstans szorzó erejéig tér el a tényező. Ha nem konstans szorzó az eltérés, akkor a függvény nem integrálható ilyen módon.

13. **Feladat:** $\int \sqrt[3]{\cos x} \cdot \sin x\,dx =$

Megoldás: Ez előző két feladatban egyértelműen látható volt egy függvény hatványa, most ehhez egy kicsit alakítanunk kell az integranduson. A gyök helyett írjunk törtkitevős hatványt.

$$\int \sqrt[3]{\cos x} \cdot \sin x\,dx = \int (\cos x)^{\frac{1}{3}} \cdot \sin x\,dx$$

Így már megvan, hogy a $\cos x$ függvény hatványa szerepel az integrandusba egyik tényezőként. Mellette $\sin x$ áll, ami csak egy előjelben különbözik a $\cos x$ deriváltjától, hiszen $(\cos x)' = -\sin x$. Érjük el, hogy megjelenjen a negatív előjel az integrandusban. Ha két negatív előjelet is kiteszünk, akkor mintha nem is tettünk volna semmit. Az egyiket tegyük ki az integrál elé, a másikat pedig belül a $\sin x$-hez. Így elérjük, hogy a hatványozott függvény deriváltja álljon az integrandusba.

$$\int (\cos x)^{\frac{1}{3}} \cdot \sin x \, dx = -\int (\cos x)^{\frac{1}{3}} \cdot (-\sin x) \, dx =$$

$$= -\int (\cos x)^{\frac{1}{3}} \cdot (\cos x)' \, dx$$

Ezután már alkalmazható az $\int f^{\alpha}(x) \cdot f'(x) \, dx = \dfrac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c$ szabály, s az alábbi eredményt kajuk:

$$-\int (\cos x)^{\frac{1}{3}} \cdot (\cos x)' \, dx = -\frac{(\cos x)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = -\frac{3}{4}(\cos x)^{\frac{4}{3}} + c.$$

14. **Feladat:** $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x} \, dx$

Megoldás: Ebben a feladatban sem nyilvánvaló, hogy függvény hatványa szerepel, ezért alakítunk az integranduson. A tört helyett most írjunk negatív kitevős hatvánnyal való szorzást.

$$\int \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x} \, dx = \int (\operatorname{ch} x)^{-3} \cdot \operatorname{sh} x \, dx$$

Már csak annyit kell észrevennünk, hogy $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$, tehát a második tényezőben a hatványozott függvény deriváltja áll.

$$\int (\operatorname{ch} x)^{-3} \cdot \operatorname{sh} x \, dx = \int (\operatorname{ch} x)^{-3} \cdot (\operatorname{ch} x)' \, dx$$

Alkalmazva a megfelelő szabályt, a következő eredményt kapjuk:

$$\int (\operatorname{ch} x)^{-3} \cdot (\operatorname{ch} x)' \, dx = \frac{(\operatorname{ch} x)^{-2}}{-2} + c = \frac{-1}{2(\operatorname{ch} x)^2} + c$$

15. **Feladat:** $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2) \cdot \operatorname{arctg}^2 x} \, dx =$

Megoldás: Tudjuk, hogy $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$. Ezért célszerűnek látszik két tört szorzatára bontani az integrandust, majd negatív kitevős hatványt írni. Így jól láthatóvá tehetjük, hogy az integrandus $f^{\alpha}(x) \cdot f'(x)$ típusú.

$$\int \frac{1}{(1+x^2) \cdot \operatorname{arctg}^2 x} \, dx = \int \frac{1}{(1+x^2)} \cdot \frac{1}{\operatorname{arctg}^2 x} \, dx =$$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)} \cdot (\operatorname{arctg} x)^{-2} \, dx = \int (\operatorname{arctg} x)^{-2} \cdot (\operatorname{arctg} x)' \, dx$$

Alkalmazzuk tehát az $f^{\alpha}(x) \cdot f'(x)$ típusú függvényekre vonatkozó integrálási módszert.

$$\int (\operatorname{arctg} x)^{-2} \cdot (\operatorname{arctg} x)' \, dx = \frac{(\operatorname{arctg} x)^{-1}}{-1} + c = \frac{-1}{\operatorname{arctg} x} + c$$

16. **Feladat:** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx =$

Megoldás: Tudjuk, hogy $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, ezért célszerű a törtet szorzattá bontani, majd a gyök helyett törtkitevős hatványt írni. Így jól láthatóvá válik, hogy az integrandus $f^{\alpha}(x) \cdot f'(x)$ típusú függvény.

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx = \int \sqrt{\ln x} \cdot \frac{1}{x}\,dx = \int (\ln x)^{\frac{1}{2}} \cdot (\ln x)'\,dx$$

Alkalmazva a megfelelő integrálási módszert, a következő eredményt kapjuk:

$$\int (\ln x)^{\frac{1}{2}} \cdot (\ln x)'\,dx = \frac{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3} + c.$$

17. **Feladat:** $\displaystyle\int \frac{3x^2 - 2}{x^3 - 2x + 6}\,dx =$

Megoldás: Az integrandus olyan tört, melynek számlálójában épp a nevező deriváltja áll, hiszen $\left(x^3 - 2x + 6\right)' = 3x^2 - 2$. Ezt úgy is mondhatjuk, hogy egy $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ típusú függvényt kell integrálnunk. Az ilyen függvények integrálására is van egy egyszerű szabály, mely a következő:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c.$$

Mivel most jól láthatóan $f(x) = x^3 - 2x + 6$, csak annyi a feladatunk, hogy behelyettesítsünk a szabályba.

$$\int \frac{3x^2 - 2}{x^3 - 2x + 6}\,dx = \int \frac{\left(x^3 - 2x + 6\right)'}{x^3 - 2x + 6}\,dx = \ln|x^3 - 2x + 6| + c$$

18. **Feladat:** $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^{3x} + 5}\,dx =$

Megoldás: Most azt kell felismernünk az integranduson, hogy a számláló, csak egy konstans szorzóban tér el a nevező deriváltjától, hiszen $(e^{3x} + 5)' = 3e^{3x}$.

Ha be tudjuk csempészni a számlálóba a 3-at, akkor az integrandus $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ típusú lesz, s el tudjuk végezni az integrálást. Hasonló esettel már találkoztunk korábban, és akkor a hiányzó konstanssal szoroztunk is, osztottunk is. Az osztást egyből írjuk az integrál jel elé, reciprokkal történő szorzás formájában.

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{3x} + 5}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3e^{3x}}{e^{3x} + 5}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{\left(e^{3x} + 5\right)'}{e^{3x} + 5}\,dx$$

Ezután már csak be kell helyettesítenünk az $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$ szabályba.

$$\frac{1}{3}\int \frac{\left(e^{3x}+5\right)'}{e^{3x}+5}\,dx = \frac{1}{3}\ln\left|e^{3x}+5\right| + c = \frac{1}{3}\ln\left(e^{3x}+5\right) + c$$

Mivel a $e^{3x}+5 > 0$ minden $x \in I\!R$ esetén, ezért hagyhattuk el az abszolút értéket az eredményben.

Amint látható, ha olyan törtünk van, meyben a számláló csak konstans szorzóban különbözik a nevező deriváltjától, akkor a hiányzó konstanssal szorozva és osztva is, elérhető, hogy $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ típusú függvény legyen az integrandus.

19. **Feladat:** $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+4}\,dx =$

Megoldás: Vegyük észre, hogy a nevező deriváltja $\left(x^2+4\right)' = 2x$, csak egy konstans szorzóban tér el a tört számlálójától, ami x. Ahhoz, hogy $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ típusú függvény legyen az integrandus, szükség lenne a számlálóban a 2-re. Az előbbiek szerint szorozzunk 2-vel, és ossszunk is 2-vel. Az osztást egyből írjuk az integrál elé $\dfrac{1}{2}$-del szorzás formájában.

$$\int \frac{x}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{\left(x^2+4\right)'}{x^2+4}\,dx$$

Már csak be kell helyettesítenünk a szabályba.

$$\frac{1}{2}\int \frac{\left(x^2+4\right)'}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+4\right| + c = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right) + c$$

Az abszolút érték most is elhagyható az eredményben, hiszen $x^2+4 > 0$ minden $x \in I\!R$ esetén.

20. **Feladat:** $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx =$

Megoldás: Használjuk fel a $\operatorname{tg} x$ definícióját, azaz írjunk helyette $\dfrac{\sin x}{\cos x}$-et.

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

Az integrálandó tört számlálója csak egy előjelben tér el a nevező deriváltjától, hiszen $(\cos x)' = -\sin x$. Szorozzuk meg ezért az integrandust -1-gyel, és az integrál elé is írjunk egy negatív előjelet. Így elérjük, hogy az integrandus $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ típusú függvény legyen.

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx$$

Ezután már csak be kell helyettesítenünk a megfelelő integrálási szabályba.

$$-\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + c$$

21. **Feladat:** $\int (2x-6)\cdot \operatorname{sh} x\,dx =$

Megoldás: Az integrandus most szorzat, s azon belül is egyik tényezője polinom, a másik pedig a $\operatorname{sh} x$. Ilyen esetben a parciális integrálás alkalmazásával érhetünk célt. Ennek szabálya röviden a következő:

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

Válasszuk a polinomot $u(x)$-nek, mert így a szabály alkalmazása után visszamaradó integrálban majd ezen polinom deriváltja fog megjelenni, ami már csak egy konstans. Így a parciális integrálás után már nem szorzatfüggvény áll majd az integrandusban.

Legyen tehát $u(x) = 2x-6$ és $v'(x) = \operatorname{sh} x$.

Ekkor $u'(x) = 2$ és $v(x) = \operatorname{ch} x$.

Az ismert $v'(x)$-ből integrálással kaptuk meg $v(x)$-et.

Helyettesítsünk be a szabályba.

$$\int (2x-6)\cdot \operatorname{sh} x\,dx = (2x-6)\cdot \operatorname{ch} x - \int 2\cdot \operatorname{ch} x\,dx$$

A feladatot még nem oldottuk meg, hisz még van egy integrálunk. Ebből azonban a konstans szorzót kiemelhetjük, s utána már csak egy alapintegrál marad. Így az eredmény a következő lesz:

$$(2x-6)\cdot \operatorname{ch} x - \int 2\cdot \operatorname{ch} x\,dx = (2x-6)\cdot \operatorname{ch} x - 2\int \operatorname{ch} x\,dx =$$

$$= (2x-6)\cdot \operatorname{ch} x - 2\operatorname{sh} x + c$$

22. **Feladat:** $\int (3x+7)\cdot 5^x\,dx$

Megoldás: Az integrandus egy hasonló szorzat, mint amilyen az előző feladatban szerepelt, így megint a parciális integrálással próbálkozhatunk.

Legyen $u(x) = 3x+7$ és $v'(x) = 5^x$.

Ekkor $u'(x) = 3$ és $v(x) = \dfrac{5^x}{\ln 5}$.

Helyettesítsünk be a szabályba.

$$\int (3x+7)\cdot 5^x\,dx = (3x+7)\cdot \frac{5^x}{\ln 5} - \int 3\cdot \frac{5^x}{\ln 5}\,dx$$

A még meghatározandó integrálból emeljük ki a konstansokat, így már csak egy alapintegrál marad majd, amit meghatározunk.

$$(3x+7)\cdot\frac{5^x}{\ln 5}-\int 3\cdot\frac{5^x}{\ln 5}\,dx=(3x+7)\cdot\frac{5^x}{\ln 5}-\frac{3}{\ln 5}\int 5^x\,dx=$$
$$=(3x+7)\cdot\frac{5^x}{\ln 5}-\frac{3}{\ln 5}\cdot\frac{5^x}{\ln 5}+c=\frac{5^x}{\ln 5}\left(3x+7-\frac{3}{\ln 5}\right)+c$$

23. **Feladat:** $\int (4x+3)\cdot \ln x\,dx=$

Megoldás: Ismét szorzatot kell integrálnunk, és az egyik tényező most is polinom, de a másik tényezőben álló $\ln x$ más típusú mint ami az előző két feladatban szerepelt. Akkor ott olyan függvény állt, amely alapintegrál volt. A $\ln x$ nem ilyen függvény. Ezért nem célszerű őt $v'(x)$-nek választani, hiszen akkor a $v(x)$-et nem könnyű meghatározni. Legyen tehát a szereposztás most a parciális integrálás során a következő:

$u(x)=\ln x$ és $v'(x)=4x+3$

Ekkor $u'(x)=\frac{1}{x}$ és $v(x)=2x^2+3x$

Helyettesítsünk ezután a szabályba.

$$\int (4x+3)\cdot \ln x\,dx=\left(2x^2+3x\right)\cdot \ln x-\int\left(2x^2+3x\right)\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

A még meghatározandó integrálban egyszerűsítsünk, majd végezzük el az integrálást.

$$(2x^2+3x)\cdot\ln x-\int 2x+3\,dx=\left(2x^2+3x\right)\cdot\ln x-\left(x^2+3x\right)+c$$

10.2. Összetett feladatok

1. **Feladat:** $\int \mathrm{ctg}^2 x\,dx=$

Megoldás: Az integrandus egy összetett függvény, s az összetett függvényekre nincs általános integrálási szabály. Próbáljuk átalakítani, hogy integrálható függvényt, vagy azok összegét kapjuk. Induljunk el a legegyszerűbb szóba jöhető összefüggésből, mely szerint $\mathrm{ctg}\,x=\frac{\cos x}{\sin x}$, és írjuk ezt be az integrandusba. Mivel így egy tört négyzetét kapjuk, ezután úgy alakíthatunk tovább, hogy külön emeljük négyzetre a számlálót és a nevezőt.

$$\int \mathrm{ctg}^2 x\,dx=\int\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2\,dx=\int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\,dx$$

Még nem látszik pontosan miért jó ez az átalakítás, de középiskolából több olyan összefüggés is ismert, melyben $\sin^2 x$ és $\cos^2 x$ szerepel, így ebben az irányban tovább alakítható a függvény. Ismét a legegyszerűbb összefüggésből menjünk tovább, ami a $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ azonosság. Rendezzük ezt át $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ alakra, és helyettesítsünk be az integrandus számlálójába.

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx$$

Bontsuk fel ezután a törtet két tört összegére azáltal, hogy külön osztjuk el a számláló tagjait, majd egyszerűsítsünk amelyik törtben erre lehetőség van.

$$\int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} - 1\,dx$$

Ezzel sikerült elérnünk, hogy az integrandus két alapintegrál különbsége lett. A tagokat külön integrálhatjuk, s az alapintegrálokat egyszerűen be kell helyettesítenünk.

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} - 1\,dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx - \int 1\,dx = -\operatorname{ctg} x - x + c$$

A feladatot megoldottuk, de talán az olvasóban felvetődik az a kérdés, miért nem a nevezőben álló $\sin^2 x$ helyére helyettesítettünk $1-\cos^2 x$-et, hiszen ezt is megtehettük volna. Természetesen ez az átalakítás sem lett volna hibás, de ekkor nem tudtuk volna tovább alakítani az integrandust. A törtek esetében többször hajthatunk végre olyan átalakítást, hogy külön osztjuk el a számláló tagjait. Ehhez arra van szükség, hogy a számlálóban álljon összeg vagy különbség, és ne a nevezőben. Az is fontos volt a további alakítás során, hogy a számláló egyik tagja megegyezett a nevezővel, s így tudtunk egyszerűsíteni. Az egyszerűsítés után kapott 1 pedig alapintegrál, hiszen $\int 1\,dx = x + c$.

2. **Feladat:** $\displaystyle\int \frac{5x^2+2}{x^2\cdot(x^2+1)}\,dx =$

Megoldás: Az integrandus egy elég bonyolult tört, azonban észrevehetjük, hogy a számláló olyan összegre bontható, melynek egyik tagja a nevező egyik tényezőjének, másik tagja pedig a nevező másik tényezőjének a számszorosa.

$$\int \frac{5x^2+2}{x^2\cdot(x^2+1)}\,dx = \int \frac{3x^2+2\left(x^2+1\right)}{x^2\cdot(x^2+1)}\,dx$$

Ez azért jó, mert így a törtet két tört összegére bonthatjuk, és a keletkező törteken belül egyszerűsíthetünk.

$$\int \frac{3x^2+2\left(x^2+1\right)}{x^2\cdot(x^2+1)}\,dx = \int \frac{3x^2}{x^2\cdot(x^2+1)} + \frac{2\left(x^2+1\right)}{x^2\cdot(x^2+1)}\,dx =$$

$$= \int \frac{3}{x^2+1} + \frac{2}{x^2}\,dx$$

Az összeget természetesen tagonként integráljuk, a konstans szorzók pedig kiemelhetők.

$$\int \frac{3}{x^2+1} + \frac{2}{x^2}\,dx = \int \frac{3}{x^2+1}\,dx + \int \frac{2}{x^2}\,dx = 3\int \frac{1}{x^2+1}\,dx + 2\int \frac{1}{x^2}\,dx$$

Az első tag alapintegrál, a második tagban pedig a reciprok helyett írjunk inkább negatív kitevős hatányt.

$$3\int \frac{1}{x^2+1}\,dx + 2\int \frac{1}{x^2}\,dx = 3\int \frac{1}{x^2+1}\,dx + 2\int x^{-2}\,dx$$

Ezután már csak be kell helyettesítenünk a megfelelő alapintegrálokat.

$$3\int \frac{1}{x^2+1}\,dx + 2\int x^{-2}\,dx = 3\operatorname{arctg} x + 2\frac{x^{-1}}{-1} + c = 3\operatorname{arctg} x - \frac{2}{x} + c$$

3. **Feladat:** $\displaystyle\int \frac{7}{25x^2+20x+13}\,dx =$

Megoldás: Olyan tört áll az integrandusban, melynek számlálója konstans, nevezője pedig egy másodfokú kifejezés. Hasonlóval találkoztunk az alapfeladatok között, csak ott a másodfokú kifejezés sokkal egyszerűbb volt. Akkor olyan összetett függvénnyé tudtuk alakítani az integrandust, melynek lineáris belső függvénye volt. Most is megpróbálhatjuk ezt elérni. Ehhez első lépésként alakítsunk teljes négyzetté a nevezőben, a számlálóból a konstanst pedig emeljük ki.

$$\int \frac{7}{25x^2+20x+13}\,dx = 7\int \frac{1}{(5x+2)^2+9}\,dx$$

Ezután emeljük ki a nevezőből a 9-et, hogy helyén 1 maradjon. Azért tesszük ezt, mert a függvény így egyre jobban hasonlít majd az $\dfrac{1}{1+x^2}$ alapintegrálra.

$$7\int \frac{1}{(5x+2)^2+9}\,dx = \frac{7}{9}\int \frac{1}{\frac{(5x+2)^2}{9}+1}\,dx$$

Az $\dfrac{(5x+2)^2}{9}$-et írjuk inkább $\left(\dfrac{5x+2}{3}\right)^2$ alakban.

$$\frac{7}{9}\int \frac{1}{\frac{(5x+2)^2}{9}+1}\,dx = \frac{7}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{5x+2}{3}\right)^2+1}\,dx$$

Utolsó átalakításként pedig az $\dfrac{5x+2}{3}$ helyett használjuk inkább az $\dfrac{5}{3}x+\dfrac{2}{3}$ alakot, valamint cseréljük meg a nevezőben a tagok sorrendjét.

$$\frac{7}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{5x+2}{3}\right)^2+1}\,dx = \frac{7}{9}\int \frac{1}{1+\left(\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}\right)^2}\,dx$$

Ezen alakból már jól látszik, hogy olyan összetett függvényt kell integrálnunk, melynek külső függvénye az $\dfrac{1}{1+x^2}$ alapintegrál, belső függvénye pedig az $\dfrac{5}{3}x+\dfrac{2}{3}$ lineáris függvény. Alkalmazzuk az ilyen összetett függvényekre vonatkozó $\int f(ax+b)\,dx = \dfrac{F(ax+b)}{a} + c$ integrálási szabályt.

A külső függvény integrálja: $\int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + c$, és $a = \dfrac{5}{3}$.

Helyettesítsünk a szabályba. Az alábbi eredményt kapjuk:

$$\frac{7}{9}\int \frac{1}{1+\left(\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}\right)^2}\,dx = \frac{7}{9}\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}\right)}{\frac{5}{3}} + c = \frac{7}{15}\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}\right) + c$$

A feladat megoldása során alkalmazott eljárás segítségével integrálhatjuk az összes olyan törtet, melynek számlálója konstans, nevezője pedig szorzattá nem bontható másodfokú kifejezés. Ilyenkor a nevezőben teljes négyzetté alakítunk, majd kiemeléssel elérjük, hogy az összegben szereplő konstans tag 1 legyen. A nevezőben szereplő másik tagot úgy alakítjuk, hogy egy elsőfokú kifejezés négyzete legyen. Ekkor olyan összetett függvényt kapunk, melynek külső függvénye $\dfrac{1}{1+x^2}$, belső függvénye pedig lineáris.

4. **Feladat:** $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{9x^2-24x-9}}\,dx =$

Megoldás: A feladat nagyon hasonlít az előzőre, csak a nevezőben gyök alatt áll a másodfokú kifejezés. Van három olyan alapintegrálunk, melyben a nevezőben másodfokú kifejezés áll gyök alatt. Ezek a következők:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \operatorname{arsh} x + c,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arch} x + c.$$

Ha az előző feladatban alkalmazott eljárással alakítjuk az integrandust, most a gyök alatt végrehajtva a lépéseket, akkor olyan összetett függvényt kapunk, melynek külső függvénye ezen három alapintegrál valamelyike, belső függvénye pedig lineáris. Első lépésként alakítsunk teljes négyzetté a gyök alatt.

$$\int \frac{1}{\sqrt{9x^2-24x-9}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{(3x-4)^2-25}}\,dx$$

Most kiemeléssel érjük el, hogy a 25 helyére 1 kerüljön. Mivel gyök alól emelünk ki, így az integrál előtt $\dfrac{1}{5}$ jelenik meg.

$$\int \frac{1}{\sqrt{(3x-4)^2-25}}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{\sqrt{\frac{(3x-4)^2}{25}-1}}\,dx$$

Ezután a gyök alatti törtet alakítsuk úgy, hogy elsőfokú kifejezés négyzete szerepeljen.

$$\frac{1}{5}\int \frac{1}{\sqrt{\frac{(3x-4)^2}{25}-1}}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{3x-4}{5}\right)^2-1}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}\right)^2-1}}\,dx$$

Amint látható, jelen esetben $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ a külső függvény, a belső bedig $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}$.

Alkalmazva az $\int f(ax+b)\,dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c$ integrálási szabályt, az alábbi eredményt kapjuk:

$$\frac{1}{5}\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}\right)^2-1}}\,dx = \frac{1}{5}\frac{\operatorname{arch}\left(\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}\right)}{\frac{3}{5}} + c = \frac{1}{3}\operatorname{arch}\left(\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}\right) + c$$

5. **Feladat:** $\int \cos^5 x\,dx =$

Megoldás: Az integrandusban szerepel egy függvény hatványa, de sajnos nem szerepel mellette szorzóként a hatványozott függvény deriváltja, vagy annak számszorosa. Így nem tudjuk azt mondani, hogy az integrandus $f^{\alpha}(x)\cdot f'(x)$ típusú. Bontsuk ezért szorzattá a függvényt.

$$\int \cos^5 x\,dx = \int \cos^4 x\cdot\cos x\,dx$$

Az első tényező tovább alakítható.

$$\int \cos^4 x\cdot\cos x\,dx = \int \left(\cos^2 x\right)^2\cdot\cos x\,dx$$

A $\sin^2 x+\cos^2 x = 1$ összefüggést rendezzük $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$ alakra, és helyettesítsünk az integrandusban $\cos^2 x$ helyére.

$$\int \left(\cos^2 x\right)^2\cdot\cos x\,dx = \int \left(1-\sin^2 x\right)^2\cdot\cos x\,dx$$

Végezzük el a négyzetre emelést.

$$\int \left(1-\sin^2 x\right)^2\cdot\cos x\,dx = \int \left(1-2\sin^2 x+\sin^4 x\right)\cdot\cos x\,dx$$

Ezután a zárójelet felbontva, az alábbit kapjuk:

$\int \cos x - 2\sin^2 x \cdot \cos x + \sin^4 x \cdot \cos x \, dx$

A három tagot külön integráljuk, és a második tagból kiemelünk.

$\int \cos x \, dx - 2 \int \sin^2 x \cdot \cos x \, dx + \int \sin^4 x \cdot \cos x \, dx$

Az első tag egy alapintegrál, a másik kettőben pedig $f^\alpha(x) \cdot f'(x)$ típusú függvény az integrandus, hiszen $(\sin x)' = \cos x$. Így ezen két tag esetében az $\int f^\alpha(x) \cdot f'(x) \, dx = \dfrac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c$ szabályt alkalmazhatjuk. Az eredmény az alábbi:

$\sin x - 2\dfrac{\sin^3 x}{3} + \dfrac{\sin^5 x}{5} + c$

Hasonló módon integrálhatók a $\sin x$, $\cos x$, sh$x$ és ch$x$ páratlan kitevős hatványai.

6. **Feladat:** $\int \left(4x^2 - 6x + 5\right) \cdot \cos x \, dx$

   Megoldás: Az integrandus egy szorzat, melynek első tényezője egy polinom, második tényezője pedig a $\cos x$. Ilyen esetben a parciális integrálás ($\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$) vezet célhoz.

   Legyen $u = 4x^2 - 6x + 5$ és $v' = \cos x$.

   Ekkor $u' = 8x - 6$ és $v = \sin x$.

   Helyettesítsünk a szabályba.

   $\int \left(4x^2 - 6x + 5\right) \cdot \cos x \, dx = \left(4x^2 - 6x + 5\right) \cdot \sin x - \int (8x - 6) \cdot \sin x \, dx$

   A még meghatározandó integrál ugyanolyan típusú, mint amilyen az eredeti feladat volt, csak 1-gyel alacsonyabb a polinom fokszáma, azaz már csak elsőfokú. Ezért újra alkalmazzuk a parciális integrálást.

   Legyen $u = 8x - 6$ és $v' = \sin x$.

   Ekkor $u' = 8$ és $v = -\cos x$.

   Amikor a szabályba helyettesítünk, akkor figyeljünk oda, hogy az integrál előtt negatív előjel állt, ami majd az integrál helyére kerülő mindkét tagra vonatkozik majd. Ezért célszerű zárójelbe tenni a behelyettesítésnél, hogy csökkentsük a hibázás veszélyét.

   $\int \left(4x^2 - 6x + 5\right) \cdot \cos x \, dx =$

   $= (4x^2 - 6x + 5) \cdot \sin x - \left((8x - 6) \cdot (-\cos x) - \int 8(-\cos x) \, dx\right)$

   Bontsuk fel a zárójelet, és emeljük ki a konstanst az integrálból.

   $\int \left(4x^2 - 6x + 5\right) \cdot \cos x \, dx =$

$$= (4x^2 - 6x + 5) \cdot \sin x + (8x - 6) \cdot \cos x - 8\int \cos x\,dx$$

Már csak egy alapintegrálunk van, melyet helyettesítsünk be. Az eredmény a következő:

$$\int \left(4x^2 - 6x + 5\right) \cdot \cos x\,dx =$$

$$= (4x^2 - 6x + 5) \cdot \sin x + (8x - 6) \cdot \cos x - 8\sin x + c =$$

$$= (4x^2 - 6x - 3) \cdot \sin x + (8x - 6) \cdot \cos x + c.$$

7. **Feladat:** $\int \arcsin x\,dx =$

Megoldás: Az integrandus egy olyan elemi alapfüggvény, mely egy másik elemi alapfüggvény inverzeként került bevezetésre. Ilyen függvények pl. a $\ln x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arsh} x$, $\operatorname{arth} x \ldots$. Ilyen esetben a parciális integrálás alkalmazása célravezető. Mivel azonban az integrandus nem szorzat, ilyenkor a függvény mellé egy 1-es szorzót írunk. A szereposztás természetesen a következő:

$u = \arcsin x$ és $v' = 1$.

Ekkor $u' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ és $v = x$.

(Gondoljuk végig, hogy a fordított szereposztás teljesen értelmetlen, hiszen ha $v' = \arcsin x$ lenne, akkor a parciális integrálás végrehajtásához szükségünk volna már az integrál eredményére. Csak olyan függvényt választhatunk v'-nak, amit könnyen tudunk integrálni.)

Helyettesítsünk a szabályba.

$$\int \arcsin x\,dx = x \cdot \arcsin x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

A még meghatározandó integrálban az $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$-et írjuk át hatvány alakra, valamint szorozzunk és osszunk -2-vel. Az osztást persze írjuk egyből az integrál előtt $-\dfrac{1}{2}$-del szorzás formájában. Így az alábbit kapjuk:

$$\int \arcsin x\,dx = x \cdot \arcsin x - \left(-\frac{1}{2}\right) \int \left(1 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)\,dx.$$

Azért kedvező ez az átalakítás, mert $\left(1 - x^2\right)' = -2x$, így ezáltal egy $f^\alpha(x) \cdot f'(x)$ típusú függvényt kaptunk. Alkalmazzuk az ilyen függvényekre vonatkozó integrálási szabályt.

$$\int \arcsin x\,dx = x \cdot \arcsin x + \frac{1}{2} \frac{\left(1 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c =$$

$$= x \cdot \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c$$

8. **Feladat:** $\int 3^x \cdot \cos x \, dx =$

Megoldás: Az integrandus olyan szorzat, melynek mindkét tényezője az a^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ függvények valamelyike. Ilyen esetben is sokszor célszerű a parciális integrálás alkalmazása, sőt általában kétszer is kell használni a szabályt. Az ilyen integrandus esetén mindegy, hogyan osztjuk ki a szerepeket az első parciális integrálás során.

Legyen most $u = 3^x$ és $v' = \cos x$ a szereposztás.

Ekkor $u' = 3^x \cdot \ln 3$ és $v = \sin x$.

Helyettesítsünk a szabályba.

$$\int 3^x \cdot \cos x \, dx = 3^x \cdot \sin x - \int 3^x \cdot \ln 3 \cdot \sin x \, dx$$

Eneljük ki az integrálból a konstans $\ln 3$-at, majd osszuk ki a következő parciális integráláshoz a szerepeket. Itt már nem mindegy, hogyan választunk. Ugyanúgy kell kiosztanunk a szerepeket, mint az első esetben.

$$\int 3^x \cdot \cos x \, dx = 3^x \cdot \sin x - \ln 3 \int 3^x \cdot \sin x \, dx$$

Legyen tehát $u = 3^x$ és $v' = \sin x$ a szereposztás.

Ekkor $u' = 3^x \cdot \ln 3$ és $v = -\cos x$.

Újra helyettesítsünk a szabályba.

$$\int 3^x \cdot \cos x \, dx =$$

$$3^x \cdot \sin x - \ln 3 \cdot \left(3^x \cdot (-\cos x) - \int 3^x \cdot \ln 3 \cdot (-\cos x) \, dx \right)$$

Bontsuk fel a zárójelet, és ismét emeljük ki a konstanst az integrálból.

$$\int 3^x \cdot \cos x \, dx = 3^x \cdot \sin x + \ln 3 \cdot 3^x \cdot \cos x - \ln^2 3 \cdot \int 3^x \cdot \cos x \, dx$$

Így lényegében egy olyan egyenletet kaptunk, amiben az integrál az ismeretlen, mert a kétszeri parciális integrálás után az eredeti integrál szám szorosát kaptuk. Annyi a feladatunk, hogy ebből az egyenletből kifjezzük az integrált. Első lépésként adjunk mindkét oldalhoz

$\ln^2 3 \cdot \int 3^x \cdot \cos x \, dx$-et.

$$\int 3^x \cdot \cos x \, dx + \ln^2 3 \cdot \int 3^x \cdot \cos x \, dx = 3^x \cdot \sin x + \ln 3 \cdot 3^x \cdot \cos x + c$$

Emeljük ki az integrált a bal oldalon.

$$\left(1 + \ln^2 3\right) \int 3^x \cdot \cos x \, dx = 3^x \cdot \sin x + \ln 3 \cdot 3^x \cdot \cos x + c$$

Végül osszuk az egyenlet mindkét oldalát $\left(1 + \ln^2 3\right)$-mal.

$$\int 3^x \cdot \cos x \, dx = \frac{1}{1 + \ln^2 3} \left(3^x \cdot \sin x + \ln 3 \cdot 3^x \cdot \cos x\right) + c$$

9. **Feladat:** $\int e^{2x} \cdot \sin 3x \, dx =$

Megoldás: A feladat hasonlít az előzőre. Olyan szorzatot kell integrálnunk, melynek egyik tényezője exponenciális, másik tényezője pedig sin. Most is parciális integrálással célszerű próbálkozni, és tetszőlegesen oszthatjuk ki a szerepeket.

Legyen pl. $u = e^{2x}$ és $v' = \sin 3x$.

Ekkor $u' = 2e^{2x}$ és $v = -\dfrac{\cos 3x}{3}$.

Szeretnénk felhívni a figyelmet arra, hogy mindkét tényező olyan összetett függvény, melynek belső függvénye elsőfokú. Figyeljünk oda, mert amikor u-ból u'-t állítjuk elő, akkor a deriválásnál a belső függvény deriváltjával szoroznunk kell a külső függvény deriváltját, amikor pedig v'-ből állítjuk elő v-t, azaz integrálunk, akkor a belső függvényből x együtthatójával osztanunk kell a külső függvény integrálját.

Helyettesítsünk be ezután a szabályba.

$$\int e^{2x} \cdot \sin 3x \, dx = e^{2x} \cdot \left(-\frac{\cos 3x}{3}\right) - \int 2e^{2x} \cdot \left(-\frac{\cos 3x}{3}\right) dx$$

Mielőtt újra alkalmaznánk a parciális integrálást, célszerű ezt egy kicsit rendezni, s a konstansokat kiemelni a tagokban.

$$\int e^{2x} \cdot \sin 3x \, dx = -\frac{1}{3} e^{2x} \cdot \cos 3x + \frac{2}{3} \int e^{2x} \cdot \cos 3x \, dx$$

Most újra osszuk ki a szerepeket immáron figyelve arra, hogy ugyanúgy tegyük ezt, mint az első esetben.

Legyen pl. $u = e^{2x}$ és $v' = \cos 3x$.

Ekkor $u' = 2e^{2x}$ és $v = \dfrac{\sin 3x}{3}$.

Helyettesítsünk a szabályba.

$$\int e^{2x} \cdot \sin 3x \, dx = -\frac{1}{3} e^{2x} \cdot \cos 3x + \frac{2}{3} \left(e^{2x} \cdot \frac{\sin 3x}{3} - \int 2e^{2x} \cdot \frac{\sin 3x}{3} \, dx \right)$$

Bontsuk fel a zárójelet, és a konstansokat most is emeljük ki a tagokból.

$$\int e^{2x} \cdot \sin 3x \, dx = -\frac{1}{3} e^{2x} \cdot \cos 3x + \frac{2}{9} e^{2x} \cdot \sin 3x - \frac{4}{9} \int e^{2x} \cdot \sin 3x \, dx$$

A kétszeri parciáli sintegrálás után az eredeti integrál egy szám szorosát kaptuk a jobb oldalon. Így annyi a feladatunk, hogy a kapott egyenletből fejezzük ki az integrált. Adjunk hozzá mindkét oldalhoz $\dfrac{4}{9} \int e^{2x} \cdot \sin 3x \, dx$-et.

$$\frac{13}{9} \int e^{2x} \cdot \sin 3x \, dx = -\frac{1}{3} e^{2x} \cdot \cos 3x + \frac{2}{9} e^{2x} \cdot \sin 3x + c$$

Végül osszunk $\dfrac{13}{9}$-del, azaz szorozzunk $\dfrac{9}{13}$-dal.

$$\int e^{2x} \cdot \sin 3x \, dx = -\frac{3}{13} e^{2x} \cdot \cos 3x + \frac{2}{13} e^{2x} \cdot \sin 3x + c$$

Az eredményt kiemelés után az alábbi alakban is írhatjuk:

$$\int e^{2x} \cdot \sin 3x \, dx = \frac{e^{2x}}{13} \left(2 \sin 3x - 3 \cos 3x\right) + c.$$

11. Határozott integrál és alkalmazásai

11.1. Alapfeladatok

1. **Feladat:** $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{x+1}\,dx =$

   Megoldás: Egy határozott integrál kiszámolása a feladat. Ilyenkor a Newton-Leibniz-tételt használhatjuk, mely azt mondja ki, hogy ha f folytonos függvény az $[a,b]$ intervallumon, és F ezen f függvény egy tetszőleges primitív függvénye, akkor

   $$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

   Eszerint elsőként szükségünk van egy primitív függvényre, azaz tulajdonképpen határozatlanul kell integrálnunk. Ezután már csak be kell helyettesítenünk az integrálási határokat a kapott primitív függvénybe, és venni azok különbségét. A primitív függvény meghatározásához írjuk a gyököt hatvány alakban.

   $$\int_0^3 \sqrt{x+1}\,dx = \int_0^3 (x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

   Most állítsuk elő a primitív függvényt. Mivel hatványt integrálunk, így eggyel növeljük a kitevőt, s az új kitevővel osztunk.

   $$\int_0^3 (x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = \frac{2}{3}\left[(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3$$

   Ezután helyettesítsük be az integrálási határokat, s vegyük a két érték különbségét. A felső határ helyettesítési értékéből vonjuk az alsó határ helyettesítési értékét.

   $$\frac{2}{3}\left[(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = \frac{2}{3}(3+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(0+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\cdot 8 - \frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{14}{3}$$

2. **Feladat:** $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(3x-2)^2}\,dx =$

   Megoldás: Elsőként most is egy primitív függvényt kell meghatároznunk. Ehhez a tört helyett célszerű negatív kitevős hatványt írnunk.

   $$\int_1^2 \frac{1}{(3x-2)^2}\,dx = \int_1^2 (3x-2)^{-2}\,dx$$

   A határozatlan integrálás során most is eggyel növeljük a kitevőt, és osztunk az új kitevővel. De most figyeljünk oda, mert lineáris belső függvény is van a hatványon belül. Ezért osztanunk kell még a belső függvényből x együtthatójával.

   $$\int_1^2 (3x-2)^{-2}\,dx = \left[\frac{(3x-2)^{-1}}{-1\cdot 3}\right]_1^2 = \left[-\frac{1}{3(3x-2)}\right]_1^2 = \left[-\frac{1}{9x-6}\right]_1^2$$

Vegyük ezek után a felső és az alsó határ helyettesítési értékének különbségét.

$$\left[-\frac{1}{9x-6}\right]_1^2 = -\frac{1}{9\cdot 2-6} - \left(-\frac{1}{9\cdot 1-6}\right) = -\frac{1}{12}+\frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

3. **Feladat:** $\displaystyle\int_1^4 \frac{1-x}{\sqrt{x}}\,dx =$

Megoldás: Első lépésként írjuk a gyököt hatvány alakban.

$$\int_1^4 \frac{1-x}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^4 \frac{1-x}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx$$

Bontsuk két törtre az integrálandó törtet.

$$\int_1^4 \frac{1-x}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx = \int_1^4 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx$$

Az első tagot írjuk negatív kitevővel, a második tagban pedig végezzük el az osztást, így mindegyik tagban egyetlen hatványfüggvényt kapunk.

$$\int_1^4 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx = \int_1^4 x^{-\frac{1}{2}} - x^{1-\frac{1}{2}}\,dx = \int_1^4 x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\,dx$$

Végezzük el a határozatlan integrálást.

$$\int_1^4 x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \left[2x^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$

Utolsó lépésként pedig vegyük a felső és az alsó határ helyettesítési értékének különbségét.

$$\left[2x^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \left(2\cdot 4^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}}\right) - \left(2\cdot 1^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}\cdot 1^{\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= \left(4 - \frac{16}{3}\right) - \left(2 - \frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{3}$$

4. **Feladat:** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x\,dx =$

Megoldás: Elsőként határozzunk meg egy primitív függvényt. Figyeljünk oda, olyan összetett függvényt integrálunk, melyben a belső függvény lineáris. Ezért a külső függvény integrálját osztani kell a belső függvényből x együtthatójával.

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x\,dx = \left[\frac{\sin 3x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

Helyettesítsük be a határokat, és vegyük a kapott értékek különbségét.

$$\left[\frac{\sin 3x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sin\left(3\cdot\frac{\pi}{6}\right)}{3} - \frac{\sin(3\cdot 0)}{3} = \frac{1}{3}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) =$$

$= \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}$

5. **Feladat:** $\int_2^4 \frac{5}{2x-3}\,dx =$

   Megoldás: Az integrandusból emeljük ki a számlálóban álló 5-öt, s utána olyan összetett függvény marad, melynek belső függvénye elsőfokú. Ezután hajtsuk végre a határozatlan integrálást.

   $\int_2^4 \frac{5}{2x-3}\,dx = 5\int_2^4 \frac{1}{2x-3}\,dx = 5\left[\frac{\ln|2x-3|}{2}\right]_2^4 = \frac{5}{2}\left[\ln|2x-3|\right]_2^4$

   Helyettesítsük a két határt, s vegyük az értékek különbségét.

   $\frac{5}{2}\left[\ln|2x-3|\right]_2^4 = \frac{5}{2}\left(\ln|2\cdot4-3| - \ln|2\cdot2-3|\right) = \frac{5}{2}(\ln 5 - \ln 1) =$

   $= \frac{5}{2}(\ln 5 - 0) = \frac{5}{2}\ln 5 \approx 4.024$

6. **Feladat:** Határozzuk meg az $f(x) = x^2 - 4x + 5$ függvény grafikonja és az x-tengely közötti síkrész területét a $[0,3]$ intervallumon!

   Megoldás: Vizsgáljuk meg, vált-e előjelet a függvény a $(0,3)$ intervallumban. Ha ugyanis igen, akkor több részletben kell számolnunk a területet, de ha nem, akkor egyetlen integrál kiszámolása elég lesz. Oldjuk meg tehát az $f(x) = 0$ egyenletet, ami az $x^2 - 4x + 5 = 0$ másodfokú egyenletet jelenti. Mivel ennek az egyenletnek a diszkriminánsa negatív $\left(D = (-4)^2 - 4\cdot5 = -4 < 0\right)$, ezért nincs valós gyök, tehát a függvény sehol sem vált előjelet. Mivel x^2 együtthatója pozitív, ezért a függvény csak pozitív értékeket vesz fel. Így a kérdéses terület egyszerűen megegyezik a függvény adott intervallumon vett integráljával, azaz

   $T = \int_0^3 x^2 - 4x + 5\,dx.$

   Határozzunk meg egy primitív függvényt.

   $T = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x\right]_0^3$

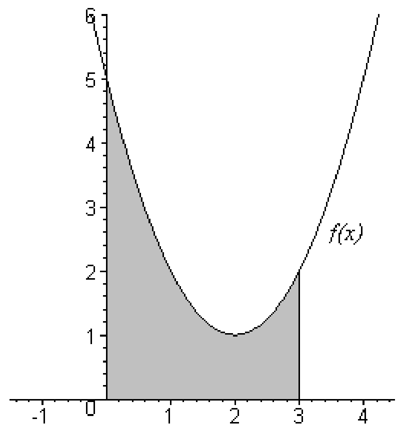
   Helyettesítsük a két határt, és vegyük az értékek különbségét.

   $T = \left(\frac{3^3}{3} - 2\cdot3^2 + 5\cdot3\right) - \left(\frac{0^3}{3} - 2\cdot0^2 + 5\cdot0\right) = 6$

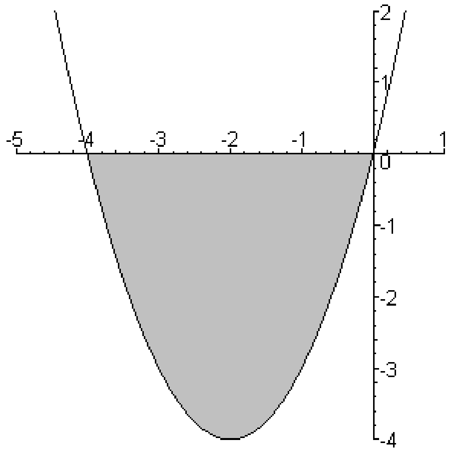
7. **Feladat:** Határozzuk meg az $f(x) = x^2 + 4x$ függvény grafikonja és az x tengely által közrezárt véges síkrész területét!

   Megoldás: Első lépésben határozzuk meg, hol metszi a függvény grafikonja az x tengelyt, azaz oldjuk meg az $f(x) = 0$ egyenletet.

   $x^2 + 4x = 0$



15. ábra. Az $f(x) = x^2 - 4x + 5$ függvény grafikonja



16. ábra. Az $f(x) = x^2 + 4x$ függvény grafikonja

Alakítsunk szorzattá a bal oldalon.

$x(x + 4) = 0$

Így már egyértelmű, hogy az egyenlet két megoldása az $x = -4$ és az $x = 0$. Ha készítünk egy ábrát a függvényről, akkor nyilvánvaló, hogy a meghatározandó terület a függvény $[-4, 0]$ intervallumon vett integráljának -1-szerese, mert az alakzat az x tengely alatt helyezkedik el.

$T = -\int_{-4}^{0} x^2 + 4x \, dx$

Határozzunk meg egy primitív függvényt.

$T = -\left[\frac{x^3}{3} + 2x^2\right]_{-4}^{0}$

Helyettesítsünk a Newton-Leibniz-szabályba.

$T = -\left(\left(\frac{0^3}{3} + 2 \cdot 0^2\right) - \left(\frac{(-4)^3}{3} + 2 \cdot (-4)^2\right)\right) = \frac{32}{3}$

A feladat megoldásából látható, hogy ha olyan alakzat területét keressük, amely az adott intervallumon negatív értékű függvény grafikonja, és az x tengely között helyezkedik el, akkor a függvény integráljának -1-szeresét kell vennünk. Természetesen azt is megtehetnénk ilyenkor, hogy a függvény adott intervallumon vett integráljának az abszolút értékét vesszük. Jelen esetben a következőt is írhattuk volna:

$T = \left|\int_{-4}^{0} x^2 + 4x\,dx\right|$.

8. **Feladat:** Határozzuk meg az $f(x) = x^3 - 8$ függvény grafikonja és a koordinátarendszer két tengelye által határolt véges síkrész területét!

   Megoldás: A feladat megoldását ismét az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásával kezdjük. Az egyenlet átrendezett alakja: $x^3 = 8$.

   Ebből $x = 2$ következik.

   Ha ábrát készítünk a függvényről, akkor jól látható, hogy olyan véges síkrész, melyet a két tengely és a függvény grafikonja határol, a $[0, 2]$ intervallumon található. Itt a függvény negatív értékeket vesz fel, így a területet a függvény ezen intervallumon vett integráljának -1-szerese adja.

   $T = -\int_{0}^{2} x^3 - 8\,dx$

   Határozzunk meg egy primitív függvényt.

   $T = -\left[\frac{x^4}{4} - 8x\right]_{0}^{2}$

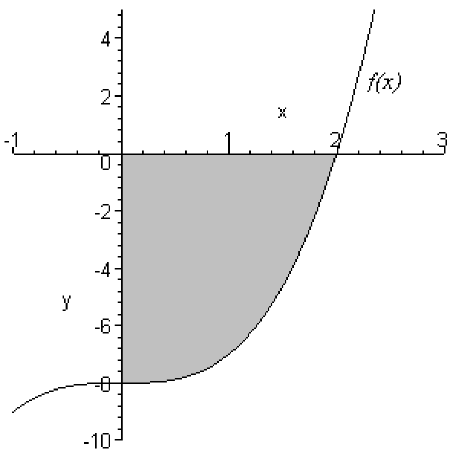
   Helyettesítsünk a Newton-Leibniz-szabályba.

   $T = -\left(\left(\frac{2^4}{4} - 8 \cdot 2\right) - \left(\frac{0^4}{4} - 8 \cdot 0\right)\right) = 12$

11.2. Összetett feladatok

1. **Feladat:** $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx =$

   Megoldás: Elsőként egy primitív függvényt kellene elállítanunk. Ehhez alakítsuk át az integrandust. Bontsuk szorzattá a nevezőt, majd pedig az integrandust két tört szozatára.



17. ábra. Az $f(x) = x^3 - 8$ függvény grafikonja

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \cos^2 x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\, dx$$

Mivel $\dfrac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$, így $\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$ helyett $\operatorname{tg}^2 x$ írható.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\, dx$$

Ebből az alakból már egyértelműen látható, hogy az integrandus most $f^\alpha(x) \cdot f'(x)$ típusú, hiszen $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Felhasználva az ilyen függvényekre vonatkozó integrálási szabályt, határozzunk meg egy primitív függvényt.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \left[\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

Helyettesítsük be az integrálási határokat, és vegyük a két érték különbségét.

$$\left[\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3}\left(\operatorname{tg}^3\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}^3 0\right) = \frac{1}{3}\left(1^3 - 0^3\right) = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}$$

2. **Feladat:** $\displaystyle\int_0^1 x \cdot e^{2x}\, dx =$

Megoldás: Az integrandusban olyan szorzat áll, melynek egyik tényezője polinom, másik tényezője pedig exponenciális, ezért a primitív függvény meghatározásához parciálisan kell integrálnunk. Ilyenkor a jelölés egyszerűbbé tétele végett célszerű külön elvégezni a határozatlan integrálást, majd utána visszatérni a határozott integrálhoz.

Legyen $u(x) = x$ és $v'(x) = e^{2x}$.

Ekkor $u'(x) = 1$ és $v(x) = \dfrac{e^{2x}}{2}$.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az e^{2x} olyan összetett függvény, melynek belső függvénye elsőfokú, így integrálásakor a külső függvény integrálját osztani kell a belső függvényből x együtthatójával.

Helyettesítsünk be a szabályba.

$$\int x \cdot e^{2x}\,dx = x \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \int 1 \cdot \frac{e^{2x}}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x \cdot e^{2x} - \int e^{2x}\,dx\right)$$

Határozzuk meg a még visszamaradt integrált. Itt is figyeljünk a lineáris belső függvényre.

$$\int x \cdot e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\left(x \cdot e^{2x} - \frac{e^{2x}}{2}\right) + c = e^{2x}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) + c$$

Most térjünk vissza a határozott integrálhoz a primitív függvénnyel.

$$\int_0^1 x \cdot e^{2x}\,dx = \left[e^{2x}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)\right]_0^1$$

Helyettesítsünk a Newton-Leibniz-szabályba.

$$\left[e^{2x}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)\right]_0^1 = e^{2\cdot 1}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) - e^{2\cdot 0}\left(\frac{0}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \approx 2.097$$

3. **Feladat:** $\displaystyle\int_1^e x^3 \cdot \ln x\,dx =$

Megoldás: Az integrandus ismét szorzat. Az egyik tényező most is polinom, a másik pedig a természetes alapú logaritmus, így a primitív függvény meghatározásához most is parciális integrálásra van szükség. Célszerű először csak határozatlan integrált írni.

Legyen $u(x) = \ln x$ és $v'(x) = x^3$.

Ekkor $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ és $v(x) = \dfrac{x^4}{4}$.

Helyettesítsünk a szabályba.

$$\int x^3 \cdot \ln x\,dx = \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x}\,dx$$

A még meghatározandó integrálban egyszerűsítsünk.

$$\int x^3 \cdot \ln x\,dx = \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \int \frac{x^3}{4}\,dx$$

Ezután határozzuk meg a primitív függvényt.

$$\int x^3 \cdot \ln x\,dx = \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \frac{x^4}{16} + c = x^4\left(\frac{\ln x}{4} - \frac{1}{16}\right) + c$$

Most térjünk vissza a határozott integrálhoz.

$$\int_1^e x^3 \cdot \ln x\,dx = \left[x^4\left(\frac{\ln x}{4} - \frac{1}{16}\right)\right]_1^e$$

Helyettesítsük az integrálisi határokat a primitív függvénybe és vegyük a kapott értékek különbségét.

$$\left[x^4\left(\frac{\ln x}{4}-\frac{1}{16}\right)\right]_1^e = e^4\left(\frac{\ln e}{4}-\frac{1}{16}\right)-1^4\left(\frac{\ln 1}{4}-\frac{1}{16}\right)=$$

$$e^4\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{16}\right)-\left(\frac{0}{4}-\frac{1}{16}\right)=\frac{3}{16}e^4+\frac{1}{16}=\frac{1}{16}\left(3e^4+1\right)\approx 10.30$$

4. **Feladat:** Határozzuk meg az $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvény grafikonja és az x-tengely közötti terület nagyságát a $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ intervallumon!

Megoldás: Vizsgáljuk meg, vált-e előjelet a függvény az adott intervallumban, azaz oldjuk meg a $\operatorname{tg} x = 0$ egyenletet. Ennek megoldása: $x = k\cdot\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$, és ezen megoldások közül az $x = 0$ az adott intervallum belsejében van. A függvény itt az előjelét is megváltoztatja, hiszen a $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ intervallumon negatív a függvény, a $\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon pedig pozitív. Az alakzatot tehát két részre kell bontanunk, és a területét két integrállal tudjuk meghatározni. Egyrészt az intervallum alsó végpontjától integrálunk a zérushelyig, és vesszük ezen integrál -1-szeresét, másrészt pedig a zérushelytől integrálunk az intervallum felső végpontjáig. Ugyanez jelekkel leírva:

$$T = -\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \operatorname{tg} x\, dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\, dx.$$

Mivel az integrandus nem alapintegrál, ezért végezzük el külön a határozatlan integrálást. A $\operatorname{tg} x$ helyett írjunk $\frac{\sin x}{\cos x}$-et.

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx$$

Szorozzunk és osszunk is -1-gyel. Az osztást egyből emeljük ki az integrál elé egy előjel formájában.

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\, dx$$

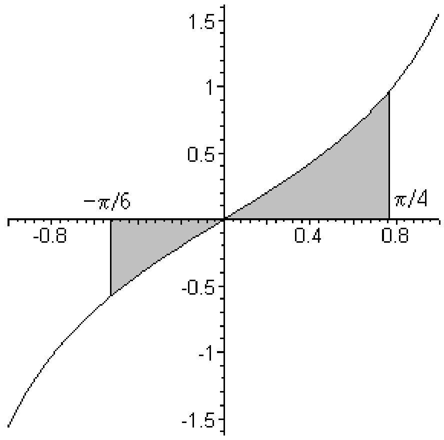
Mindezt azért tettük, mert $(\cos x)' = -\sin x$, s így az integrandus $\frac{f'(x)}{f(x)}$ típusú lett, azaz

$$-\int \frac{-\sin x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\, dx.$$

Alkalmazzuk az $\frac{f'(x)}{f(x)}$ típusú függvényekre vonatkozó integrálási szabályt.

$$-\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\, dx = -\ln|\cos x| + c$$

Ezután térjünk vissza a területhez.



18. ábra. Az $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvény grafikonja

$T = -\left[-\ln|\cos x|\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{0} + \left[-\ln|\cos x|\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \left[\ln|\cos x|\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{0} - \left[\ln|\cos x|\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}}$

Helyettesítsünk a Newton-Leibniz-szabályba.

$T = \left(\ln|\cos 0| - \ln\left|\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right|\right) - \left(\ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| - \ln|\cos 0|\right) =$

$= \left(\ln 1 - \ln\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \ln 1\right) = -\ln\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2} =$

$= \ln\frac{2}{\sqrt{3}} + \ln\frac{2}{\sqrt{2}} = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \ln\frac{4}{\sqrt{6}} \approx 0.490$

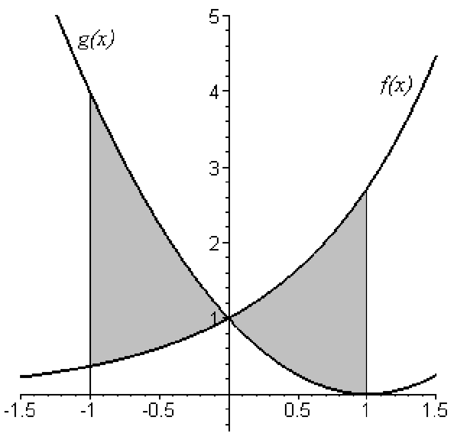
5. **Feladat:** Határozzuk meg az $f(x) = e^x$ és $g(x) = x^2-2x+1$ függvények grafikonjai közti területet a $[-1, 1]$ intervallumon!

   Megoldás: Először azt kell eldöntenünk, hogy metszi-e egymást a két függvény grafikonja az adott intervallumban. Tegyük egyenlővé a két függvényt, így az $e^x = x^2 - 2x + 1$ egyenletet kapjuk, melyet algebrai úton nem tudunk megoldani. Ha ábrázoljuk a két függvényt, akkor sejthető, hogy $x = 0$ esetén metszik egymást, és a sejtést a függvényekbe történő behelyettesítéssel gyorsan ellenőrizhetjük is.

   $f(0) = e^0 = 1$ és $g(0) = 0^2 - 2\cdot 0 + 1 = 1$

   A két függvény grafikonja tehát valóban az $x = 0$ helyen metszi egymást. Más metszéspont pedig nincs az adott intervallumban, hiszen az exponenciális függvény szigorúan monoton nő, a másodfokú függvény pedig szigorúan monoton csökken itt, így a két függvénynek legfeljebb egy közös pontja lehet az adott intervallumban.

   A metszéspont miatt a kérdéses területet két integrállal tudjuk meghatározni. Egyrészt integráljuk -1-től 0-ig a $g(x) - f(x)$ függvényt,



19. ábra. Az $f(x) = e^x$ és $g(x) = x^2 - 2x + 1$ függvények grafikonjai

mert itt a $g(x)$ grafikonja halad az $f(x)$ grafikonja felett. Majd ehhez hozzáadjuk az $f(x) - g(x)$ függvénynek 0-tól 1-ig vett integrálját. Ezen az intervallumon az $f(x)$ grafikonja halad $g(x)$ grafikonja felett, ezért vonjuk $f(x)$-ből a $g(x)$-et. A terület tehát az alábbi módon írható fel:

$$T = \int_{-1}^{0} \left(x^2 - 2x + 1\right) - e^x \, dx + \int_{0}^{1} e^x - \left(x^2 - 2x + 1\right) \, dx$$

Határozzunk meg primitív függvényeket.

$$T = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x - e^x\right]_{-1}^{0} + \left[e^x - \frac{x^3}{3} + x^2 - x\right]_{0}^{1}$$

Végül helyettesítsünk a Newton-Leibniz-szabályba.

$$T = \left(\frac{0^3}{3} - 0^2 + 0 - e^0\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2 + (-1) - e^{-1}\right) +$$

$$+ \left(e^1 - \frac{1^3}{3} + 1^2 - 1\right) - \left(e^0 - \frac{0^3}{3} + 0^2 - 0\right) =$$

$$= -1 - \left(-\frac{1}{3} - 2 - \frac{1}{e}\right) + \left(e - \frac{1}{3}\right) - 1 = e + \frac{1}{e} \approx 3.086$$

6. **Feladat:** Számoljuk ki azon forgástest térfogatát, mely az $f(x) = \operatorname{th} x$ függvény grafikonja $[0, 1]$ intervallumhoz tartozó ívének x-tengely körüli forgatásával keletkezik!

   Megoldás: Tudjuk, hogy egy folytonos függvény $[a, b]$ intervallumhoz tartozó ívének x-tengely körüli forgatásakor keletkező forgástest térfogatára az alábbi összefüggés igaz:

   $$V = \pi \int_a^b f^2(x) \, dx.$$

Lényegében annyi a feladatunk, hogy behelyettesítünk ebbe a képletbe, majd elvégezzük az integrálást. A helyettesítés során egyrészt a függvényt kell helyettesíteni, másrészt pedig az intervallum végpontjait. Jelen esetben így az alábbit kapjuk:

$$V = \pi \int_0^1 \operatorname{th}^2 x \, dx.$$

Alakítsunk az integranduson azt felhasználva, hogy $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

$$V = \pi \int_0^1 \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)^2 dx = \pi \int_0^1 \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} \, dx$$

Ezután használjuk fel az $1 = \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x$ azonosságot, melyet hozzunk $\operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x - 1$ alakra. Helyettesítsük ezt az integrandus számlálójába.

$$V = \pi \int_0^1 \frac{\operatorname{ch}^2 x - 1}{\operatorname{ch}^2 x} \, dx$$

Bontsuk fel ezután két törtre a függvényt, és egyszerűsítsünk.

$$V = \pi \int_0^1 \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \, dx = \pi \int_0^1 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \, dx$$

Így már csak két alapintegrál maradt. Határozzuk meg a primitív függvényt.

$$V = \pi \left[x - \operatorname{th} x\right]_0^1$$

Végül helyettesítsük az integrálási határokat, és vegyük az értékek különbségét.

$$V = \pi \left((1 - \operatorname{th} 1) - (0 - \operatorname{th} 0)\right) = \pi \left(1 - \operatorname{th} 1\right) \approx 0.749$$

7. **Feladat:** Számoljuk ki azon forgástest térfogatát, mely az $f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt[4]{e^{2x}+1}}$ függvény grafikonja $[0, 1]$ intervallumhoz tartozó ívének x-tengely körüli forgatásával keletkezik!

   Megoldás: Helyettesítsünk be a forgástestek térfogatára vonatkozó $V = \pi \displaystyle\int_a^b f^2(x) \, dx$ képletbe.

   $$V = \pi \int_0^1 \left(\frac{e^x}{\sqrt[4]{e^{2x}+1}}\right)^2 dx$$

   Végezzük el a négyzetre emelést.

   $$V = \pi \int_0^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+1}} \, dx$$

   A tört helyett írjunk inkább negatív kitevős hatvánnyal történő szorzást. Természetesen a gyökről is térjünk át törtkitevős hatványra.

   $$V = \pi \int_0^1 \left(e^{2x}+1\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{2x} \, dx$$

Mivel $\left(e^{2x}+1\right)' = 2e^{2x}$, ezért szorozzunk is és osszunk is kettővel. Az osztást egyből az integráljel elé írjuk $\frac{1}{2}$-del való szorzás formájában.

$$V = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \left(e^{2x}+1\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(2e^{2x}\right)\, dx$$

Az integrandus ezen alakban $f^{\alpha}(x)\cdot f'(x)$ típusúvá vált, s így könnyen elvégezhető az integrálás.

$$V = \frac{\pi}{2}\left[\frac{\left(e^{2x}+1\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = \pi\left[\left(e^{2x}+1\right)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = \pi\left[\sqrt{e^{2x}+1}\right]_0^1$$

Utolsó lépésként helyettesítsünk a Newton-Leibniz-szabályba.

$$V = \pi\left(\sqrt{e^{(2\cdot 1)}+1} - \sqrt{e^{(2\cdot 0)}+1}\right) = \pi\left(\sqrt{e^2+1} - \sqrt{2}\right) \approx 4.656$$

8. **Feladat:** Határozzuk meg az $f(x) = x\cdot\sqrt{x}$ függvény görbéjének ívhosszát a $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ intervallumon!

   Megoldás: Tudjuk, hogy az $f(x)$ folytonosan differenciálható függvény grafikonjának ívhosszát az $[a, b]$ intervallumon az alábbi összefüggés adja:

   $$|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx.$$

   Ebbe a képletbe kell behelyettesítenünk a feladatban megadott függvény deriváltját és az intervallum végpontjait.

   Elsőként deriváljuk a függvényt, azonban ehhez célszerű átalakítani, és egyetlen hatványként írni.

   $$f(x) = x\cdot\sqrt{x} = x\cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$$

   Ezután már egyszerű a deriválás.

   $$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

   Most helyettesítsünk az ívhossz képletébe.

   $$|\Gamma| = \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}\, dx$$

   Végezzük el a négyzetre emelést.

   $$|\Gamma| = \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\, dx$$

   A gyököt írjuk hatványként.

   $$|\Gamma| = \int_0^{\frac{1}{4}} \left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

Így jól látható, hogy az integrandus olyan összetett függvény, melynek belső függvénye lineáris. Integrálnunk kell tehát a külső függvényt, majd osztanunk kell a belső függvényből x együtthatójával.

$$|\Gamma| = \left[\frac{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{4}}\right]_0^{\frac{1}{4}} = \frac{8}{27}\left[\sqrt{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^3}\right]_0^{\frac{1}{4}}$$

Végül helyettesítsük az integrálási határokat.

$$|\Gamma| = \frac{8}{27}\left(\sqrt{\left(1+\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{4}\right)^3} - \sqrt{\left(1+\frac{9}{4}\cdot 0\right)^3}\right) = \frac{8}{27}\left(\frac{125}{64}-1\right) = \frac{61}{216}$$

9. **Feladat:** Számoljuk ki az $f(x) = x^2 - \frac{\ln x}{8}$ függvény görbéjének ívhosszát a $[1, e]$ intervallumon!

Megoldás: Mivel az $|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$ képletbe kell helyettseítenünk, így elsőként elő kell állítanunk a függvény deriváltját.

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{8x}$$

Helyettesítsünk a képletbe.

$$|\Gamma| = \int_1^e \sqrt{1+\left(2x-\frac{1}{8x}\right)^2}\,dx$$

Végezzük el a négyzetre emelést, majd vonjunk össze.

$$|\Gamma| = \int_1^e \sqrt{1+\left(4x^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{64x^2}\right)}\,dx = \int_1^e \sqrt{4x^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{64x^2}}\,dx$$

A gyök alatt álló kifejezésben egy teljes négyzet ismerhető fel, s így eltűnik az integrandusból a négyzetgyök.

$$|\Gamma| = \int_1^e \sqrt{\left(2x+\frac{1}{8x}\right)^2}\,dx = \int_1^e 2x+\frac{1}{8x}\,dx$$

Így már csak alapintegrálok szerepelnek az integrandusban, meghatározhatunk tehát egy primitív függvényt.

$$|\Gamma| = \left[x^2+\frac{\ln x}{8}\right]_1^e$$

Helyettesítsünk a Newton-Leibniz-szabályba.

$$|\Gamma| = \left(e^2+\frac{\ln e}{8}\right) - \left(1^2+\frac{\ln 1}{8}\right) = \left(e^2+\frac{1}{8}\right) - (1+0) = e^2-\frac{7}{8} \approx 6.514$$

10. **Feladat:** Határozzuk meg azon forgástest palástjának felszínét, mely úgy keletkezik, hogy az $f(x) = \sqrt{3x+1}$ függvény grafikonjának $[1, 3]$ intervallumhoz tartozó ívét megforgatjuk az x-tengely körül!

Megoldás: Tudjuk, hogy az $[a, b]$ intervallumon folytonosan differenciálható $f(x)$ függvény grafikonjának x tengely körüli megforgatásával kapott forgástest palástjának felszínét az alábbi összefüggés adja:

$$F = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Ebbe a képletbe kell behelyettesítenünk a feladatban megadott függvényt és deriváltját, valamint az intervallum végpontjait.

Állítsuk elő a függvény deriváltját. Figyeljünk oda arra, hogy összetett függvényt deriválunk, így a külső függvény deriváltját szorozni kell még a belső függvény deriváltjával.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3x+1}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$$

Ezután már helyettesíthetünk a képletbe.

$$F = 2\pi \int_1^3 \sqrt{3x+1} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}\right)^2}\, dx$$

Végezzük el a második gyök alatt a négyzetre emelést.

$$F = 2\pi \int_1^3 \sqrt{3x+1} \cdot \sqrt{1 + \frac{9}{4(3x+1)}}\, dx$$

A két gyökös kifejezés szorzatát írjuk fel egyetlen gyökkel, és végezzük el a szorzást.

$$F = 2\pi \int_1^3 \sqrt{(3x+1) \cdot \left(1 + \frac{9}{4(3x+1)}\right)}\, dx = 2\pi \int_1^3 \sqrt{(3x+1) + \frac{9}{4}}\, dx$$

Vonjunk össze a gyök alatt, és a írjunk inkább törtkitevős hatványt a gyök helyett.

$$F = 2\pi \int_1^3 \sqrt{3x + \frac{13}{4}}\, dx = 2\pi \int_1^3 \left(3x + \frac{13}{4}\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

Átalakításaink eredményeként az integrandus olyan összetett függvény lett, melynek belső függvénye elsőfokú, így könnyen elvégezhető az integrálás. A külső függvényt integráljuk, és osztunk a belső függvényből x együtthatójával.

$$F = 2\pi \left[\frac{\left(3x + \frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} \cdot 3}\right]_1^3 = \frac{4\pi}{9} \left[\sqrt{\left(3x + \frac{13}{4}\right)^3}\right]_1^3$$

A primitív függvénybe helyettesítsük az integrálási határokat.

$$F = \frac{4\pi}{9} \left(\sqrt{\left(3 \cdot 3 + \frac{13}{4}\right)^3} - \sqrt{\left(3 \cdot 1 + \frac{13}{4}\right)^3}\right) =$$

$$= \frac{4\pi}{9}\left(\sqrt{\left(\frac{49}{4}\right)^3} - \sqrt{\left(\frac{25}{4}\right)^3}\right) = \frac{4\pi}{9}\left(\left(\frac{7}{2}\right)^3 - \left(\frac{5}{2}\right)^3\right) =$$

$$= \frac{4\pi}{9} \cdot \frac{218}{8} \approx 38.05$$

11. **Feladat:** Számoljuk ki azon forgástest palástjának felszínét, mely úgy keletkezik, hogy az $f(x) = \dfrac{x^3}{3}$ függvény grafikonjának $[0, 1]$ intervallumhoz tartozó ívét forgatjuk meg az x-tengely körül!

Megoldás: Amint az előző feladatban, úgy most is az alábbi képletbe kell helyettesítenünk.

$$F = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Ehhez állítsuk elő a függvény deriváltját.

$$f'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2$$

Ezután végezzük el a helyettesítést.

$$F = 2\pi \int_0^1 \frac{x^3}{3}\sqrt{1 + (x^2)^2}\, dx$$

Végezzük el a négyzetre emelést, emeljünk ki, és a gyök helyett írjunk inkább hatványt.

$$F = 2\pi \int_0^1 \frac{x^3}{3}\sqrt{1 + x^4}\, dx = \frac{2\pi}{3}\int_0^1 x^3\left(1 + x^4\right)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

Mivel $(1 + x^4)' = 4x^3$, ezért szorozzunk is és osszunk is 4-gyel. Az osztást, amint az korábban is tettük, írjuk $\frac{1}{4}$-del szorzás formájában az integrál előtt.

$$F = 2\pi \int_0^1 \frac{x^3}{3}\sqrt{1 + x^4}\, dx = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{1}{4}\int_0^1 4x^3\left(1 + x^4\right)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

Ezzel sikerült elérnünk, hogy az integrandus $f^{\alpha}(x) \cdot f\ (x)$ típusú lett.

$$F = \frac{\pi}{6}\int_0^1 \left(1 + x^4\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + x^4\right)'\, dx$$

Alkalmazzuk a megfelelő integrálási szabályt.

$$F = \frac{\pi}{6}\left[\frac{(1 + x^4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{\pi}{9}\left[\sqrt{(1 + x^4)^3}\right]_0^1$$

Helyettesítsük ezután az integrálási intervallum végpontjait.

$$F = \frac{\pi}{9}\left(\sqrt{(1 + 1^4)^3} - \sqrt{(1 + 0^4)^3}\right) = \frac{\pi}{9}\left(\sqrt{8} - 1\right) \approx 0.638$$