

I. feladatsor

(1) Töltse ki az alábbi táblázatot:

Komplex szám	Valós rész	Képzetes rész	Konjugált	Abszolútérték
$4 + 2i$	4	2	$4 - 2i$	$\sqrt{20}$
$-3 + 4i$	-3	4	$-3 - 4i$	5
$5i - 1$	-1	5	$-5i - 1$	$\sqrt{26}$
$-6i$	0	-6	$6i$	6
$-3 + 5i$	-3	5	$-3 - 5i$	$\sqrt{34}$
$3 + 2i$	3	2	$3 - 2i$	$\sqrt{13}$
$-7i$	0	-7	$7i$	7

(2) Adottak az alábbi komplex számok: $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = 2i$. Határozza meg az alábbiakat:

- (a) $3 + 2i$ (b) $3 - 2i$ (c) $3 - 2i$ (d) $1 + 4i$
 (e) $\sqrt{13}$ (f) $\sqrt{13} + \sqrt{2}$ (g) $5 + i$ (h) $-1 - 5i$
 (i) $2 + 2i$ (j) $5 - i$ (k) $5 - i$ (l) $\sqrt{26}$
 (m) $\sqrt{26}$ (n) $-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$ (o) $-\frac{1}{13} - \frac{5}{13}i$ (p) $\frac{3}{2} - i$
 (q) $-\frac{1}{2}i$ (r) $-\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$ (s) $-\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$ (t) $-5 - i$
 (u) $\frac{\sqrt{442}}{2}$

(3) Legyen $z_1 = 3(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$ valamint $z_2 = 12(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$. Határozza meg az alábbiakat:

- (a) 3
 (b) 12
 (c) $36(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)$
 (d) $\frac{1}{4}(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ)$
 (e) $3^3(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)$
 (f) $\sqrt[3]{3}(\cos \frac{60^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} + i \sin \frac{60^\circ + k \cdot 360^\circ}{3})$ $k = 0, 1, 2$ ($20^\circ, 140^\circ, 260^\circ$)
 (g) $\sqrt[4]{12}(\cos \frac{120^\circ + k \cdot 360^\circ}{4} + i \sin \frac{120^\circ + k \cdot 360^\circ}{4})$ $k = 0, 1, 2, 3$ ($30^\circ, 120^\circ, 210^\circ, 300^\circ$)
 (h) $\sqrt{36}(\cos \frac{180^\circ + k \cdot 360^\circ}{2} + i \sin \frac{180^\circ + k \cdot 360^\circ}{2})$ $k = 0, 1$ ($90^\circ, 270^\circ$)

(4) Töltse ki az alábbi táblázatot:

Algebrai alak	Trigonometrikus alak
$1 + i$	$\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$
$1 - \sqrt{3}i$	$2(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ)$
$-1 + i$	$\sqrt{2}(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$
2	$2(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$
i	$1(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$

(5) Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán:

- (a) $z = \frac{8}{13} + \frac{1}{13}i$
 (b) $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = 1 - 3i$
 (c) $z_1 = \sqrt{3} + 2i$, $z_2 = -\sqrt{3}$
 (d) $z_1 = 3$, $z_2 = -3$
 (e) $z_1 = 4i$, $z_2 = -4i$
 (f) $z = \sqrt[6]{2}(\cos \frac{135^\circ + k \cdot 360^\circ}{6} + i \sin \frac{135^\circ + k \cdot 360^\circ}{6})$ $k = 0, 1, 2$ ($45^\circ, 165^\circ, 285^\circ$)
 (g) $z = \sqrt[12]{10}(\cos \frac{71,57^\circ + k \cdot 360^\circ}{12} + i \sin \frac{71,57^\circ + k \cdot 360^\circ}{12})$ $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$
 ($11, 93^\circ, 71, 93^\circ, 131, 93^\circ, 191, 93^\circ, 251, 93^\circ, 311, 93^\circ$)
 (h) $z_{1,2,3} = (\cos \frac{90^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} + i \sin \frac{90^\circ + k \cdot 360^\circ}{3})$ $k = 0, 1, 2$ ($30^\circ, 150^\circ, 270^\circ$)
 $z_{4,5,6} = \sqrt[3]{3}(\cos \frac{270^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} + i \sin \frac{270^\circ + k \cdot 360^\circ}{3})$ $k = 0, 1, 2$ ($90^\circ, 210^\circ, 330^\circ$)
 (i) $z_{1,2,3,4} = (\cos \frac{90^\circ + k \cdot 360^\circ}{4} + i \sin \frac{90^\circ + k \cdot 360^\circ}{4})$ $k = 0, 1, 2, 3$ ($22,5^\circ, 112,5^\circ, 202,5^\circ, 292,5^\circ$)
 $z_{5,6,7,8} = \sqrt[8]{2}(\cos \frac{45^\circ + k \cdot 360^\circ}{8} + i \sin \frac{45^\circ + k \cdot 360^\circ}{8})$ $k = 0, 1, 2, 3$ ($11, 25^\circ, 101, 25^\circ, 191, 25^\circ, 281, 25^\circ$)
 (j) $z_{1,2,3} = \sqrt[3]{2}(\cos \frac{90^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} + i \sin \frac{90^\circ + k \cdot 360^\circ}{3})$ $k = 0, 1, 2$ ($30^\circ, 150^\circ, 270^\circ$)
 $z_{4,5,6} = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}(\cos \frac{45^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} + i \sin \frac{45^\circ + k \cdot 360^\circ}{3})$ $k = 0, 1, 2, 3$ ($15^\circ, 135^\circ, 255^\circ$)

(6) Végezze el a kijelölt műveleteket:

- (a) $2 + 3i$
- (b) $2\left(\cos \frac{300^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} + i \sin \frac{300^\circ + k \cdot 360^\circ}{3}\right)$ $k = 0, 1, 2$ ($100^\circ, 220^\circ, 340^\circ$)
- (c) $\frac{3\sqrt{2}}{2}(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)$
- (d) $-1 + \sqrt{3}i$
- (e) $\frac{1}{13} + \frac{5}{13}i$
- (7) Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán:
- (a) $z = 2 + 7i$
- (b) $z = -\frac{23}{13} - \frac{11}{13}i$
- (c) $z = \frac{2}{7} - i$
- (d) $z = -\frac{5}{3} - \frac{7}{3}i$
- (e) $z_1 = 0, z_2 = i, z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, z_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$
- (f) $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- (g) $z_1 = i, z_2 = -i$
- (h) $z_1 = 1 - i, z_2 = 2 - i$
- (8) Határozza meg az alábbi komplex számok trigonometrikus alakját:
- (a) $z = \sqrt{2}(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)$
- (b) $z = 2(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)$
- (c) $z = 2\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$
- (d) $z = 4(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$
- (e) $z = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$

II. feladatsor

(1) Töltse ki az alábbi táblátot:

$f(x)$	$g(x)$	$f(g(x))$	$g(f(x))$	$f(f(x))$
$\sin(x)$	x^3	$\sin(x^3)$	$\sin^3(x)$	$\sin(\sin(x))$
$\sin(x) + x + 1$	\sqrt{x}	$\sin(\sqrt{x}) + \sqrt{x} + 1$	$\sqrt{\sin x + x + 1}$	$\sin(\sin(x) + x + 1) + \sin x + x + 1 + 1$
$\frac{1}{x+2}$	$3^x + 1$	$\frac{1}{3^x + 1 + 2}$	$3^{\frac{1}{x+2}} + 1$	$\frac{1}{\frac{1}{x+2} + 2}$
$\cos(x)$	x^4	$\cos(x^4)$	$\cos^4(x)$	$\cos(\cos(x))$
$\sin(x)$	2^x	$\sin(2^x)$	$2^{\sin(x)}$	$\sin(\sin(x))$
$\lg(x)$	$x^3 + 2x - 1$	$\lg(x^3 + 2x - 1)$	$\lg^3(x) + 2\lg(x) - 1$	$\lg(\lg(x))$
$\arcsin(x)$	\sqrt{x}	$\arcsin(\sqrt{x})$	$\sqrt{\arcsin(x)}$	$\arcsin(\arcsin(x))$
$\ln(x)$	e^x	x	x	$\ln(\ln(x))$
$\ln(x)$	x^2	$\ln(x^2)$	$\ln^2(x)$	$\ln(\ln(x))$
$\ln(x)$	$\ln(x)$	$\ln(\ln(x))$	$\ln(\ln(x))$	$\ln(\ln(x))$

(2) Határozza meg a valós számok legbővebb részalmazát, ahol az alábbi függvények értelmesek:

(a) $D_f =]-\infty; -4[\cup]-4; -1[\cup]5; \infty[$

(b) $D_f =]-2; 2[\setminus \{-\frac{3}{2}\}$

(c) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

(d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

(e) $D_f =]-\infty; -11[\cup]2; \infty[$

(f) $D_f =]-1; \infty[$

(g) $D_f =]\frac{1}{3}; \infty[$

(h) Három kikötést kell tenni:

- $\arccos(x)$ értelmezési tartománya: $[-1, 1]$. Jelölje ezt H_1 .
- $\ln(x)$ értelmezési tartománya: $]0, \infty[$. Jelölje ezt H_2 .
- a nevező nem lehet nulla. Jelölje ezt H_3 .

Ezeket: $D_f = H_1 \cap H_2 \setminus H_3$

Ezeket külön-külön megoldjuk:

•

$$\begin{aligned} -1 \leq x + 2 \leq 1 & \quad \setminus -2 \\ -3 \leq x \leq -1 & \end{aligned}$$

azaz $H_1 = [-3; -1]$

•

$$\begin{aligned} x + 4 > 0 & \quad \setminus -4 \\ x > -4 & \end{aligned}$$

azaz $H_2 =]-4; \infty[$

•

$$\ln(x + 4) \neq 0 = \ln 1$$

a logaritmus függvény szigorú monotonitása miatt

$$\begin{aligned} x + 4 \neq 1 & \quad \setminus -4 \\ x \neq -3 & \end{aligned}$$

azaz $H_3 = \{-3\}$

Vagyis: $D_f = H_1 \cap H_2 \setminus H_3 =]-3; -1]$

(3)

(4) Határozza meg az alábbi függvények inverz függvényét, ha létezik:

(a) $D_f = \mathbb{R}, R_f = \mathbb{R}, D_{\bar{f}} = \mathbb{R}, R_{\bar{f}} = \mathbb{R}, \bar{f}(x) = \frac{x+6}{4}$

(b) $D_f = [-3; \infty[, R_f = [0; \infty[, D_{\bar{f}} = [0; \infty[, R_{\bar{f}} = [-3; \infty[, \bar{f}(x) = \frac{x^2-6}{2}$

(c) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-5\}, R_f = \mathbb{R} \setminus \{-6\}, D_{\bar{f}} = \mathbb{R} \setminus \{-6\}, R_{\bar{f}} = \mathbb{R} \setminus \{-5\}, \bar{f}(x) = \frac{3}{x+6} - 5$

(d) $D_f = \mathbb{R}, R_f =]3; \infty[, D_{\bar{f}} =]3; \infty[, R_{\bar{f}} = \mathbb{R}, \bar{f}(x) = \log_2(x-3) + 7$

(e) $D_f =]5; \infty[, R_f = \mathbb{R}, D_{\bar{f}} = \mathbb{R}, R_{\bar{f}} =]5; \infty[, \bar{f}(x) = \frac{5^{x-6} + 10}{2}$

(f) $D_f = \mathbb{R}, R_f = [3; \infty[$ de így nem invertálható. $D_{\bar{f}} = [4; \infty[, R_{\bar{f}} = [3; \infty[, D_{\bar{f}} = [3; \infty[, R_{\bar{f}} = [4; \infty[, \bar{f}(x) = \sqrt{x-3} + 4$

(g) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$, $R_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $D_{\bar{f}} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $R_{\bar{f}} = \mathbb{R} \setminus \{4\}$, $\bar{f}(x) = \frac{2}{x-3} + 4$

(h) $D_f = [-\frac{1}{3}; 1] = R_{\bar{f}}$, $R_f = [0; 2\pi] = D_{\bar{f}}$, $\bar{f}(x) = \frac{1}{3} \left(2 \sin \left(\frac{x-\pi}{2} \right) + 1 \right)$

(i) $D_f = \mathbb{R} = R_{\bar{f}}$, $R_f = [-\frac{\pi}{2}; 0] = D_{\bar{f}}$, $\bar{f}(x) = 4 \operatorname{tg} \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) + 1$

(j) $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-4; -2]$ de így nem invertálható. Leszűkítés pl.: $D_f = [\pi; 5\pi] = R_{\bar{f}}$, $R_f = [-4; -2] = D_{\bar{f}}$,
 $\bar{f}(x) = 4 \arccos(x+3) + \pi$

(5) Páros, páratlan vagy egyik sem az alábbi függvény:

(a) $f(x) = e^{-x}x^2$, $f(-x) = e^x x^2$ azaz egyik sem.

(b) $f(x) = e^{-x^2} \sin x$, $f(-x) = -e^{-x^2} \sin x$, azaz páratlan.

(c) $f(x) = x^2 + \cos x + 2$, $f(-x) = x^2 + \cos x + 2$, azaz páros.

III. feladatsor

- (1) Adja meg az $a_n = \frac{5n-1}{2n+1}$ sorozat következő elemeit: $a_1 = \frac{4}{3}, a_2 = \frac{9}{5}, a_{n+1} = \frac{5n+4}{2n+3}, a_{n-3} = \frac{5n-16}{2n-5}$.
- (2) Vizsgálja meg az alábbi sorozatokat monotonitás, korlátosság és konvergencia szempontjából:
- (a) Szigorúan monoton csökkenő, $K = a_1 = \frac{1}{5}, k = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
- (b) Szigorúan monoton nő, $k = a_1 = \frac{4}{3}, K = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$
- (c) Se nem csökken, se nem nő. $K = \frac{1}{4}, k = -\frac{1}{2}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- (d) A harmadik tagtól kezdve szigorúan monoton csökkenő. $K = a_3 = 7, k = a_2 = -10, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{4}{3}$
- (3) Adottak az alábbi konvergens sorozatok. Adja meg a határértéket, és azt a küszöbindexet, amelynél nagyobb indexű tagjai a sorozatnak $\varepsilon = \frac{1}{100}$ -nál kisebb hibával közelítik a határértéket!
- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4, n_0 = 100$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -3, n_0 = 1296$
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{4}, n_0 = 31$ (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{4}{3}, n_0 = 380$
- (4) Határozza meg az alábbi nevezetes sorozatok határértéket:
- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$
- (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- (g) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{-3}$ (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- (j) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ (k) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (l) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$
- (5) A nevezetes sorozathatárértékek ismeretével és a műveletekre vonatkozó tételek segítségével határozza meg mely sorozatok konvergensek és mi a határértékük!
- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$
- (6) Határozza meg a következő sorozatok határértékét:
- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{5}{7}$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{5}$
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{1}{9}$ (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- (g) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$
- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ (j) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{7}{3}$
- (k) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{1}{7}$ (l) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$
- (7) Határozza meg a következő sorozatok határértékét:
- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{4}{\sqrt[3]{5}}$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{1}{3}$
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{15}{16}$ (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$
- (k) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{\sqrt{5}}$ (l) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{3}$
- (8) Határozza meg a következő sorozatok határértékét:
- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{1}{3}$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{4}$
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- (g) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{32}$ (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$
- (9) Határozza meg a következő sorozatok határértékét:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^2$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^2$
(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$
(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^3$ (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{-4}$
(g) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^3$ (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{-1}$
(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{34}$ (j) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{-\frac{3}{7}}$
(k) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (l) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
(m) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ (n) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$
(o) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ (p) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{-\frac{3}{2}}$
(q) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (r) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{\frac{14}{3}}$
(s) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ (t) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

IV. feladatsor

(1) Határozza meg az alábbi függvényhatárértékeket a függvény grafikonjának ismeretében:

- (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$
- (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ nem létezik
- (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}$ nem létezik, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$
- (e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$
- (f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = +\infty$
- (g) $\lim_{x \rightarrow 0} \lg x$ nem létezik, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \lg x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \lg x = +\infty$
- (h) $\lim_{x \rightarrow 0} \log_{\frac{1}{2}} x$ nem létezik, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$
- (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ nem létezik, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x$ nem létezik
- (j) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty$
- (k) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \arcsin x = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 1} \arcsin x$ nem létezik, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \arcsin x = \frac{\pi}{2}$
- (l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$
- (m) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \arccos x = \pi$, $\lim_{x \rightarrow 1} \arccos x$ nem létezik
- (n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arcctg} x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi$
- (o)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & \text{ha } x \geq 1 \\ 4^x & \text{ha } x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ nem létezik, } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 8$$

(p)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{ha } x < 2 \\ \sqrt{x} & \text{ha } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ nem létezik, } \lim_{x \rightarrow 9} f(x) = 3$$

(q)

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^x \frac{1}{3} & \text{ha } x \geq -1 \\ -\frac{1}{x} & \text{ha } x < -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{3}, \lim_{x \rightarrow 10} f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{11}$$

(2) Határozza meg az alábbi függvények x_0 -beli határértékét:

- (a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$
- (b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
- (c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{3}{4}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\frac{3}{4}$
- (d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{7}{2}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\frac{7}{2}$
- (e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$
- (f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
- (g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \frac{5}{4}$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ nem létezik
- (h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ nem létezik, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{2}{3}$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{3}{4}$, $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ nem létezik
- (i) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{3}$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ nem létezik
- (j) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \text{nem létezik}$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$
- (k) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$
- (l) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
- (m) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

$$(n) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

(3) Határozza meg az alábbi határértékeket:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{5-x} - \sqrt{5+x}} = -\sqrt{5} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sqrt{3-2x} - \sqrt{3+2x}} = -\sqrt{3}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{3x} = \frac{2}{3} \quad (d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{7x} = \frac{5}{7}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{5x} = \frac{3}{5} \quad (f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{4x} = \frac{5}{4}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{7x} = \frac{5}{7} \quad (h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\sin(3x)} = \frac{4}{3}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} = 1 \quad (j) \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \left(\frac{e^{2x} - 1}{2x} \right) = \frac{\pi}{4}$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2x+3} \right)^{5x-1} = e^{-\frac{5}{2}} \quad (l) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+6} \right)^{2x+1} = e^{-4}$$

$$(m) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x+2} \right)^{x+4} = e^{-\frac{1}{3}} \quad (n) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-2}{5x+7} \right)^{3x-2} = e^{-\frac{27}{5}}$$

$$(o) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{2x+3} \right)^{x+1} = 0 \quad (p) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{7x-3} \right)^{3x} = 0$$

$$(q) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{2x-1} \right)^{2x+3} = \infty \quad (r) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+2}{x+3} \right)^{4x-1} = \infty$$

$$(s) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2+2}{2x^2-1} \right)^{2x+3} = 1 \quad (t) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-3}{2x-1} \right)^{x^2+3} = \infty$$

$$(u) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2+2}{3x^2-1} \right)^{2x^2+3} = e^2 \quad (v) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2+2x+20}{3x^2+20} \right)^{2x+3} = e^{\frac{4}{3}}$$

V. feladatsor

(1) Adja meg az x_0 helyhez tartozó differenciáhányados függvényét, a differenciáhányados értékét a definíció alapján:

(a) $f(x) = 5, x_0 = 2, x_0 = -3 \quad d_2(x) = \frac{5-5}{x-2} = 0 \quad f'(2) = 0$

$$d_{-3}(x) = \frac{5-5}{x+3} = 0 \quad f'(-3) = 0$$

(b) $f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = 2, x_0 = -3 \quad d_2(x) = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x-2} = -\frac{1}{2x} \quad f'(2) = -\frac{1}{4}$

$$d_{-3}(x) = \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{3}}{x+3} = \frac{1}{3x} \quad f'(-3) = -\frac{1}{4}$$

(c) $f(x) = \sqrt{x} + x, x_0 = -3, x_0 = 2, x_0 = 4$
 $x_0 = -3$ -ban a függvény nincs értelmezve.

$$d_2(x) = \frac{\sqrt{x} + x - \sqrt{2} - 2}{x-2} = 1 + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x-2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} \quad f'(2) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$d_4(x) = \frac{\sqrt{x} + x - \sqrt{4} - 4}{x-4} = 1 + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{4}}{x-4} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{4}} \quad f'(4) = 1 + \frac{1}{4}$$

(2) Adja meg az alábbi függvények szelő egyenesének egyenletét, valamint az érintő egyenesek egyenletét:

(a) $f(x) = 4x^2 + 1, P_1(0, 1), P_2(-1, 5) \quad e_1 : y = 1, e_2 : y = -8x - 3, sz : y = -4x + 1$

(b) $f(x) = \frac{1}{x}, P_1(2, \frac{1}{2}), P_2(-3, -\frac{1}{3}) \quad e_1 : y = -\frac{1}{4}x + 1, e_2 : y = -\frac{1}{9}x - \frac{2}{3}, sz : y = \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}$

(3) Határozza meg az alábbi függvények deriváltfüggvényeit:

(a) $f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{x^2}$

(b) $f'(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \ln \frac{2}{3} - 4 \cos x$

(c) $f'(x) = 6x^2 + \frac{1}{x \ln 3}$

(d) $f'(x) = 12x^3 + \sin x - \frac{5}{x^2}$

(e) $f'(x) = \cos x \cdot \operatorname{tg} x + \sin x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$

(f) $f'(x) = e^x \cdot \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x}$

(g) $f'(x) = \frac{1}{x \ln 10} \cdot \arcsin x + \lg x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(h) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \lg x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x \ln 10}$

(i) $f'(x) = 20x^4 \cdot \operatorname{arctg} x + 4x^5 \cdot \frac{1}{1+x^2}$

(j) $f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \sin x + \ln x \cdot \cos x$

(k) $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

(l) $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

(m) $f'(x) = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{\sin^2 x}$

(n) $f'(x) = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} \ln x - \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x}$

(o) $f'(x) = \frac{(2^x \ln 2 - 4x^3)(x+2) - (2^x - x^4)}{(x+2)^2}$

(p) $f'(x) = \frac{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \cdot 3 \sin x - (\sqrt[3]{x} + 15) \cdot 3 \cos x}{9 \sin^2 x}$

(q) $f'(x) = \frac{-\frac{1}{\sin^2 x}(e^x + 4) - \operatorname{cgt} x \cdot e^x}{(e^x + 4)^2}$

(r) $f'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2$

(s) $f'(x) = 3(\sin x)^2 \cos x$

(t) $f'(x) = \frac{1}{x^2 + 4} \cdot 2x$

(u) $f'(x) = e^{x^2 - \frac{1}{x} + 3} \cdot (2x + \frac{1}{x^2})$

(v) $f'(x) = e^{\operatorname{tg} x \cdot \ln(x^2 + \cos x)} \cdot \left(\frac{\ln(x^2 + \cos x)}{\cos^2} + \operatorname{tg} x \cdot \frac{2x - \sin x}{x^2 + \cos x} \right)$

(w) $f'(x) = x^x \cdot (\ln x + 1)$

$$(x) f'(x) = (\sin x)^{\cos x} \cdot \left(\frac{\cos x}{\sin x} \cos x - \ln(\sin x) \sin x \right)$$

$$(y) f'(x) = \cos \left(\frac{\sqrt{x+3}}{2x+x^2} \right) \cdot \left(\frac{\frac{1}{2}(x+3)^{-\frac{1}{2}}(2^x+x^2) - \sqrt{x+3}(2^x \ln 2 + 2x)}{(2^x+x^2)^2} \right)$$

$$(z) f'(x) = (x^3+3)^{\arctg x} \left(\frac{3x^2}{x^3+3} \arctg x + \frac{\ln(x^3+3)}{1+x^2} \right)$$

$$(aa) r'(\varphi) = 4^\varphi \ln 4 \cdot \ln \varphi + 4^\varphi \frac{1}{\varphi}$$

$$(ab) V'(t) = 6t^5 \cdot \cos(3t) - t^6 \sin(3t) \cdot 3$$

$$(ac) h'(t) = p^5 + 1, p \text{ valós paraméter}$$

$$(ad) h'(p) = t^5 \cdot p^4 - 7p^6, t \text{ valós paraméter}$$

$$(ae) f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} \cdot (\sqrt{x+3})^{x+4} + \operatorname{ctg} x \cdot (\sqrt{x+3})^{x+4} \left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} + 3^x \ln 3}{\sqrt{x+3^x}} (x+4) + \ln(\sqrt{x+3^x}) \right)$$

(4) Határozza meg az alábbi határértékeket:

$$\begin{array}{llll} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(5x)}{3x} = \frac{5}{3} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2}{3x^2+x+11} = \frac{1}{3} & \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \cdot \ln(x)) = 0 & \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e & \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = -\frac{1}{2} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = 0 & \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{x-1}{x-1^2}} = e^{-1} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln \frac{x}{2}}{x-2} = \frac{1}{2} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{x^2} = \infty & \lim_{x \rightarrow 0} 2x \cdot \operatorname{ctg} 3x = \frac{3}{2} & \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x = 1 & \lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{ctg} x)^{\sqrt[3]{x}} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x}{\ln x} = \infty & \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} = e^2 & \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln(x^2 + 1)) = \infty & \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \operatorname{tg} x = 0 \end{array}$$

(5) Írja fel az alábbi $f(x)$ függvények m meredekségű érintőinek egyenletét:

$$(a) x_1 = 1, e_1 : y = 6x + 25, x_2 = 2, e_1 : y = 6x + 24$$

$$(b) x_1 = -\frac{5}{3}, e_1 : y = 10x + \frac{36}{3}, x_2 = -\frac{7}{3}, e_1 : y = 10x + \frac{72}{3}$$

$$(c) x_1 = 1, e_1 : y = \frac{1}{26}x + 0,6482, x_2 = -4, e_1 : y = \frac{1}{26}x - 0,5329$$

(6) Hol növekvő, hol csökkenő, hol van lokális szélsőértéke és milyen a szélsőérték jellege az $f(x)$ függvénynek, ha a derivált függvénye az alábbi:

$$(a) f'(x) = (x+4)(x-3)^2$$

	$] -\infty; -4[$	-4	$] -4; 3[$	3	$]3; \infty[$
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	\searrow	lok. min.	\nearrow	-	\nearrow

$$(b) f'(x) = \frac{(x+5)^2(x-1)}{x-3}$$

	$] -\infty; -5[$	-5	$] -5; 1[$	1	$]1; 3[$	3	$]3; \infty[$
$f'(x)$	+	0	+	0	-	X	+
$f(x)$	\nearrow	-	\nearrow	lok. max.	\searrow	-	\nearrow

$$(c) f'(x) = \ln x \cdot \frac{(x-2)^2(x-5)}{(x+3)(x-4)}$$

	$]0; 1[$	1	$]1; 2[$	2	$]2; 4[$	4	$]4; 5[$	5	$]3; \infty[$
$f'(x)$	-	0	+	0	+	X	-	0	+
$f(x)$	\searrow	lok. min.	\nearrow	-	\nearrow	-	\searrow	lok. min.	\nearrow

(7) Hol konvex, hol konkáv, hol van inflexió pontja az $f(x)$ függvénynek, ha a második derivált függvénye az alábbi:

$$(a) f''(x) = (x+4)(x-3)^2$$

	$] -\infty; -4[$	-4	$] -4; 3[$	3	$]3; \infty[$
$f''(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	\frown	infl. pont	\smile	-	\smile

$$(b) f''(x) = \frac{(x+4)^3(x-2)^2}{x+1}$$

	$] -\infty; -4[$	-4	$] -4; -1[$	-1	$] -1; 2[$	2	$]2; \infty[$
$f''(x)$	+	0	-	X	+	0	+
$f(x)$	\smile	infl. pont	\frown	-	\smile	-	\smile

$$(c) f''(x) = \frac{\sqrt{x}(x-4)}{(x-1)^2(x-2)} \cdot 2^x$$

	0	$]0; 1[$	1	$]1; 2[$	2	$]2; 4[$	4	$]4; \infty[$
$f''(x)$	0	+	X	+	X	-	0	+
$f(x)$	-	\smile	-	\smile	-	\frown	infl. pont	\smile

(8) Végezzen teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényeken:

(a) 1. $D_f = \mathbb{R}$

2. zérushelye van a $-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$ pontokban

3. páratlan, $f(0) = 0$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$.

5. $f'(x) = 3 - 3x^2$, a derivált zérushelyei (lehetséges lokális szélsőérték helyek): $-1, 1$.

6.

x	$] -\infty, -1[$	-1	$] -1, 1[$	1	$] 1, \infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	\searrow	lok. min. $f(-1) = -2$	\nearrow	lok. max. $f(1) = 2$	\searrow

7. $f''(x) = -6x$, a második derivált zérushelyei (lehetséges inflexió pontok): 0 .

8.

x	$] -\infty, 0[$	0	$] 0, \infty[$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	\smile konvex	inflexió pont $f(0) = 0$	\frown konkáv

10. $R_f = \mathbb{R}$.

(b) 1. $D_g = \mathbb{R}$.

2. nincs zérushelye.

3. páros, $f(0) = 1$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$.

5. $g'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$, a derivált zérushelye az $x = 0$.

6.

x	$] -\infty, 0[$	0	$] 0, \infty[$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	\nearrow	lok. max. $f(0) = 1$	\searrow

7. $g''(x) = \frac{2(3x^2 - 1)}{(1+x^2)^3}$, a második derivált zérushelyei az $x = -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}$ pontok.

x	$] -\infty, -1/\sqrt{3}[$	$-1/\sqrt{3}$	$] -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}[$	$1/\sqrt{3}$	$] 1/\sqrt{3}, \infty[$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	\smile konvex	inflexió pont $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{4}$	\frown konkáv	inflexió pont $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{4}$	\smile konvex

10. $R_g =]0; 1]$

(c) $h(x) = 4x^2 + \frac{1}{x}$

1. A h függvény mindenhol értelmezett, kivéve az $x = 0$ pontot. $D_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2. Zérushely: $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

3. $h(-x) = 4x^2 - \frac{1}{x}$, nem páros, nem páratlan. $h(0)$ nincs értelmezve.

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \infty$

5. $h'(x) = 8x - \frac{1}{x^2}$. $h'(x) = 0$ akkor, ha $x = \frac{1}{2}$.

6.

x	$] -\infty, 0[$	0	$] 0, 2[$	2	$] 2, \infty[$
$h'(x)$	$-$	X	$-$	0	$+$
$h(x)$	\searrow		\searrow	lok. min. $h\left(\frac{1}{2}\right) = 3$	\nearrow

7. $h''(x) = 8 + \frac{2}{x^3}$, $h''(x) = 0$, ha $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

8.

10. $R_h = \mathbb{R}$

x	$] - \infty, -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}[$	$-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$	$] -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, 0[$	0	$]0, \infty[$
$h''(x)$	$+$	0	$-$	X	$+$
$h(x)$	\smile	inflexiós pont $h(-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}) = 0$	\frown		\smile

(d) $i(x) = \frac{x^2}{x^2+4}$

- $D_i = \mathbb{R}$.
- Zérushely $x = 0$.
- $i(-x) = \frac{x^2}{x^2+4} = i(x)$ azaz a függvény páros, $i(0) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} i(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} i(x) = 1$.
- $i'(x) = \frac{8x}{(x^2+4)^2}$, $i'(x) = 0$, ha $x = 0$
-

x	$] - \infty, 0[$	0	$]0, \infty[$
$i'(x)$	$-$	0	$+$
$i(x)$	\searrow	lok. min. $i(0) = 0$	\nearrow

- $i''(x) = \frac{8(4-3x^2)}{(x^2+4)^3}$, $i''(x) = 0$ ha $x_1 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
-

x	$] - \infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}[$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$] -\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}[$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$] \frac{2\sqrt{3}}{3}, \infty[$
$i''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$i(x)$	\smile	inflexiós pont $i(-\frac{2\sqrt{3}}{3}) = \frac{1}{4}$	\frown	inflexiós pont $i(\frac{2\sqrt{3}}{3}) = \frac{1}{4}$	\smile

10. $R_i = [0; 1[$

(e) $j(x) = x^2 e^{-x}$

- $D_j = \mathbb{R}$
- Zérushely: $x = 0$
- $j(-x) = x^2 e^x$ nem páros, nem páratlan. $j(0) = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} j(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} j(x) = 0$
- $j'(x) = e^{-x}(2x - x^2)$, $j'(x) = 0$ ha $x_1 = 0$, $x_2 = 2$
-

x	$] - \infty, 0[$	0	$]0, 2[$	2	$]2, \infty[$
$j'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$j(x)$	\searrow	lok. min. $j(0) = 0$	\nearrow	lok. max. $j(2) = \frac{4}{e^2}$	\searrow

- $j''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$, $j''(x) = 0$, ha $x_1 = 2 - \sqrt{2}$, $x_2 = 2 + \sqrt{2}$.
-

x	$] - \infty, 2 - \sqrt{2}[$	$2 - \sqrt{2}$	$]2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}[$	$2 + \sqrt{2}$	$]2 + \sqrt{2}, \infty[$
$j''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$j(x)$	\smile	inflexiós pont $j(2 - \sqrt{2}) \approx 0,19$	\frown	inflexiós pont $j(2 + \sqrt{2}) \approx 0,38$	\smile

10. $R_j =]0, \infty[$

(f) $k(x) = x \lg(x)$

- $D_k =]0, \infty[$
- Zérushely: $x = 1$
- nem páros, nem páratlan, ui. negatív x -re nincs értelmezve. $k(0)$ szintén nincs értelmezve.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} k(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} k(x) = \infty$
- $k'(x) = \lg x + \frac{1}{\ln 10}$, $k'(x) = 0$ ha $x = \frac{1}{e}$
-
- $k''(x) = \frac{1}{x \ln 10}$, $k''(x)$ -nek nincs zérushelye
-
- $R_k =] - 0,16, \infty[$

x	$]0, \frac{1}{e}[$	$\frac{1}{e}$	$] \frac{1}{e}, \infty[$
$k'(x)$	-	0	+
$k(x)$	\searrow	lok. min. $k(\frac{1}{e}) = -0,16$	\nearrow

x	$]0, \infty[$
$k''(x)$	+
$k(x)$	\smile

(g) $l(x) = \ln(x^2 + 4)$

- $D_l = \mathbb{R}$
- Zérushely nincs.
- $l(-x) = \ln(x^2 + 4) = l(x)$ páros, $l(0) = \ln 4$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} l(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} l(x) = \infty$
- $l'(x) = \frac{2x}{x^2+4}$, $l'(x) = 0$ ha $x = 0$
-

x	$] - \infty, 0[$	0	$]0, \infty[$
$l'(x)$	-	0	+
$l(x)$	\searrow	lok. min. $l(0) = \ln 4$	\nearrow

7. $l''(x) = \frac{8-2x^2}{(x^2+4)^2}$, $l''(x) = 0$, ha $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

8.

x	$] - \infty, -2[$	-2	$] - 2; 2[$	2	$]2; \infty[$
$l''(x)$	-	0	+	0	-
$l(x)$	\frown	inflexió pont $l(-2) = \ln 8$	\smile	inflexió pont $l(2) = \ln 8$	\frown

10. $R_l = [\ln 4, \infty[$

(h) $m(x) = \ln(x^2 - 1)$

- $D_m =] - \infty; -1[\cup]1; \infty[$
- Zérushely: $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$.
- $m(-x) = \ln(x^2 - 1) = m(x)$ páros, $m(0)$ nincs értelmezve
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} m(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} m(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} m(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} m(x) = -\infty$
- $m'(x) = \frac{2x}{x^2-1}$, $m'(x) = 0$ ha $x = 0$, de ez nem része az értelmezési tartománynak
-

x	$] - \infty, -1[$	$]1, \infty[$
$m'(x)$	-	+
$m(x)$	\searrow	\nearrow

7. $m''(x) = \frac{-2-2x^2}{(x^2-1)^2}$, $m''(x)$, seholsem nulla.

8.

x	$] - \infty, -1[$	$]1, \infty[$
$m''(x)$	-	-
$m(x)$	\frown	\frown

10. $R_m = \mathbb{R}$

(9) Határozza meg az alábbi függvények x_0 körüli n -ed fokú Taylor polimónját!

(a) $T_{f,0,4}(x) = 3 + x - 2x^2 + x^3 + x^4$

$T_{f,1,4}(x) = 4 + 4(x-1) + 7(x-1)^2 + 5(x-1)^3(x-1)^4 = 3 + x - 2x^2 + x^3 + x^4$

(b) $T_{f,0,3}(x) = e - 2ex + 2ex^2 - \frac{4}{3}ex^3$

$T_{f,0,4}(x) = e - 2ex + 2ex^2 - \frac{4}{3}ex^3 + \frac{2}{3}ex^4$

$T_{f,\frac{1}{2},3}(x) = 1 - 2\left(x - \frac{1}{2}\right) + 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{4}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)^3$

$$T_{f, \frac{1}{2}, 4}(x) = 1 - 2 \left(x - \frac{1}{2} \right) + 2 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{4}{3} e \left(x - \frac{1}{2} \right)^3 + \frac{2}{3} e \left(x - \frac{1}{2} \right)^4$$

$$T_{f, 1, 3}(x) = e^{-1} - 2e^{-1}(x-1) + 2e^{-1}(x-1)^2 - \frac{4}{3}e^{-1}(x-1)^3$$

$$T_{f, 1, 4}(x) = e^{-1} - 2e^{-1}(x-1) + 2e^{-1}(x-1)^2 - \frac{4}{3}e^{-1}(x-1)^3 + \frac{2}{3}e^{-1}(x-1)^4$$

(c) $T_{f, 0, 3}(x) = \ln 2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{24}x^3$

$$T_{f, -1, 3}(x) = x + 1 - \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{3}(x+1)^3$$

VI. feladatsor

(1) Az alapfüggvények integrálja segítségével határozza meg az alábbi függvények határozatlan integrálját:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \int f(x) dx &= \frac{x^{9/2}}{9/2} - \ln|x| + 2x + C & \text{(b)} \int f(x) dx &= 3 \ln|x| - 2 \frac{x^{-4}}{-4} + C \\
 \text{(c)} \int f(x) dx &= e^x + 4 \cos x + \operatorname{tg} x + C & \text{(d)} \int f(x) dx &= \frac{1}{2} \arcsin x + C \\
 \text{(e)} \int f(x) dx &= \frac{2}{3} \operatorname{arctg} x + 4x + C & \text{(f)} \int f(x) dx &= \frac{5^x}{\ln 5} - 3 \frac{x^6}{6} + 2 \ln|x| + 3x + C \\
 \text{(g)} \int f(x) dx &= 4 \sin x + 3 \operatorname{ctg} x + C & \text{(h)} \int f(x) dx &= 7 \ln|x| + 4 \frac{x^{-1}}{-1} - 3\sqrt{3}x + C
 \end{aligned}$$

(2) Határozza meg az alábbi függvények határozatlan integrálját helyettesítéssel:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \int f(x) dx &= \frac{(1-7x)^3}{-3 \cdot 7} + C & \text{(b)} \int f(x) dx &= 3 \frac{\ln|2x+3|}{2} + C \\
 \text{(c)} \int f(x) dx &= \frac{e^{2-4x}}{-4} + C & \text{(d)} \int f(x) dx &= -\frac{\cos(5-3x)}{-3} + C \\
 \text{(e)} \int f(x) dx &= \frac{-\operatorname{ctg}(4x+1)}{4} + C & \text{(f)} \int f(x) dx &= 2 \frac{\operatorname{arctg}(4x+3)}{4} + C \\
 \text{(g)} \int f(x) dx &= \frac{\arcsin(5x+2)}{5} + C & \text{(h)} \int f(x) dx &= -\frac{(5x+3)^{2/3}}{2/3} + C
 \end{aligned}$$

(3) Határozza meg az alábbi függvények határozatlan integrálját helyettesítéssel:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \int f(x) dx &= -4 \frac{\cos^6 x}{6} + C & \text{(b)} \int f(x) dx &= \frac{1}{3} \frac{(3+2x^3)^{2/3}}{2/3} + C \\
 \text{(c)} \int f(x) dx &= \frac{(x^2+2)^{3/4}}{3/4} + C & \text{(d)} \int f(x) dx &= \frac{1}{2} \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + C \\
 \text{(e)} \int f(x) dx &= \frac{1}{3} \frac{(x^3-2)^{6/5}}{6/5} + C & \text{(f)} \int f(x) dx &= \frac{\operatorname{arctg}^{5/3} x}{5/3} + C \\
 \text{(g)} \int f(x) dx &= 3 \frac{\ln^5 x}{5} + C & \text{(h)} \int f(x) dx &= \frac{4}{\arccos x} + C \\
 \text{(i)} \int f(x) dx &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 x} + C & \text{(j)} \int f(x) dx &= -\frac{1}{3} \frac{1}{(x^2+x)^3} + C
 \end{aligned}$$

(4) Határozza meg az alábbi függvények határozatlan integrálját helyettesítéssel:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \int f(x) dx &= \frac{1}{2} \ln|4x+1| + C & \text{(b)} \int f(x) dx &= -\frac{7}{3} \ln|4-3x| + C \\
 \text{(c)} \int f(x) dx &= -\frac{5}{2} \ln|1+x^2| + C & \text{(d)} \int f(x) dx &= \frac{4}{3} \ln|1+3 \sin x| + C \\
 \text{(e)} \int f(x) dx &= -\frac{4}{3} \ln|5+3e^{-x}| + C & \text{(f)} \int f(x) dx &= 2 \ln|\operatorname{arctg} x| + C
 \end{aligned}$$

(5) Határozza meg az alábbi függvények határozatlan integrálját helyettesítéssel:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \int f(x) dx &= e^{1+\sin x} + C & \text{(b)} \int f(x) dx &= -\frac{1}{4} e^{\frac{1}{x}} + C \\
 \text{(c)} \int f(x) dx &= \frac{1}{5} \sin(5\sqrt{x}) + C & \text{(d)} \int f(x) dx &= 2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) + C
 \end{aligned}$$

(6) Határozza meg az alábbi függvények határozatlan integrálját parciális integrálással:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \int f(x) dx &= (2x-5) \sin x + 2 \cos x + C & \text{(b)} \int f(x) dx &= -(x^2-1) \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C \\
 \text{(c)} \int f(x) dx &= (4x+3) \frac{e^{2x}}{2} - e^{2x} + C & \text{(d)} \int f(x) dx &= 4x \frac{e^{1-2x}}{-2} - e^{1-2x} + C \\
 \text{(e)} \int f(x) dx &= -\frac{1}{5} \sin(2x)e^{1-x} - \frac{2}{5} \cos(2x)e^{1-x} + C & \text{(f)} \int f(x) dx &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C \\
 \text{(g)} \int f(x) dx &= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right) \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} - x + C & \text{(h)} \int f(x) dx &= x \ln x - x + C \\
 \text{(i)} \int f(x) dx &= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C & \text{(j)} \int f(x) dx &= x^2 \operatorname{arctg} x - x + \operatorname{arctg} x + C \\
 \text{(k)} \int f(x) dx &= \frac{3}{13} \cos(2x+2)e^{3x-4} + \frac{2}{13} \sin(2x+2)e^{3x-4} + C \\
 \text{(l)} \int f(x) dx &= \ln^2 x \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right) - 2 \ln x \left(\frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{4} + 2x\right) + \frac{2}{27} x^3 + \frac{x^2}{4} + 4x + C
 \end{aligned}$$

(7) Határozza meg az alábbi függvények határozatlan integrálját:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \int f(x) dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{2} \right) + C & \text{(b)} \int f(x) dx = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} (3x + C) \\ \text{(c)} \int f(x) dx = \frac{1}{20} \operatorname{arctg} \left(\frac{4}{5}x \right) + C & \text{(d)} \int f(x) dx = \frac{2}{3} \frac{\operatorname{arctg} \left(\sqrt{5/3}x \right)}{\sqrt{5/3}} + C \\ \text{(e)} \int f(x) dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{x+1}{2} \right) + C & \text{(f)} \int f(x) dx = \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{x-3}{2} \right) + C \\ \text{(g)} \int f(x) dx = \arcsin(x-1) + C & \text{(h)} \int f(x) dx = \frac{1}{3} \arcsin(3x-1) + C \\ \text{(i)} \int f(x) dx = \frac{1}{2} \arcsin(2x+3) + C & \text{(j)} \int f(x) dx = \frac{1}{3} \arcsin(3x-2) + C \end{array}$$

VII. feladatsor

(1) Határozza meg az alábbi határozott integrálok értékét:

$$(a) \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx = -\ln 2 \quad (b) \int_2^7 \sqrt{x+2} dx = \frac{38}{3} \quad (c) \int_3^{2\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{10} - 3$$

$$(d) \int_1^e \ln x dx = 1 \quad (e) \int_{-4}^{-2} \frac{1}{x^2+8x+20} dx = \frac{\pi}{8} \quad (f) \int_0^\pi \sin x dx = 2$$

(2) Határozza meg a területeket, ha:

$$(a) \int_{-6}^{-3} f(x) dx = \ln 4$$

$$(b) \int_0^1 f(x) dx = \frac{e^2 + 1}{4}$$

$$(c) \int_{-3}^1 f(x) dx = \frac{16}{3}$$

(3) Határozza meg a két görbe által közrezárt területet!

$$(a) T = 4,5$$

$$(b) T = 4,5$$

$$(c) T = \frac{1}{3}$$

(4) Határozza meg az $f(x)$ és az x tengely által közbezárt területet!

$$(a) T = \frac{125}{6}$$

$$(b) T = \frac{125}{6}$$

$$(c) T = \frac{5}{4} - \ln 4$$

(5) Határozza meg alábbi függvények ívhosszát!

$$(a) s_f = 2\sqrt{10}$$

$$(b) s_f = \frac{\pi}{2}$$

$$(c) s_f = 74$$

(6) Határozza meg alábbi függvények x tengely körüli megforgatásával keletkezett forgástest térfogatát!

$$(a) V = \frac{2}{3}\pi$$

$$(b) V = \pi \ln 3$$

$$(c) V = \pi$$

$$(d) V = \pi \left(\frac{e^2}{2} + 2e - 1,5 \right)$$

$$(e) V = \pi \left(\frac{2e^3 + 1}{9} \right)$$

$$(f) V = \frac{\pi^2}{24}$$

(7) Határozza meg alábbi függvények x tengely körüli megforgatásával keletkezett forgástest palástjának felszínét!

$$(a) A = 2\pi$$

$$(b) A = \frac{\pi}{18} \left(\frac{145^{3/2}}{3/2} - \frac{2}{3} \right)$$

(8) Határozza meg alábbi függvények x tengely körüli megforgatásával keletkezett forgástest teljes felszínét!

$$(a) A = 3\pi$$

$$(b) A = 64\pi + \frac{\pi}{18} \left(\frac{145^{3/2}}{3/2} - \frac{2}{3} \right)$$

VIII. feladatsor

(1) $y' = 2 + 3e^x \cdot 2 - 2x + y = 2 - 2x + 2x + 3e^x = 2 + 3e^x$

(2)

$$y'' - 3y' + 2y + 3 - 2x =$$

$$3e^x + 4e^{2x} - 3(3e^x + 2e^{2x} + 1) + 2(3e^x + e^{2x} + x) + 3 - 2x =$$

$$3e^x + 4e^{2x} - 9e^x - 6e^{2x} - 3 + 6e^x + 2e^{2x} + 2x + 3 - 2x = 0$$

(3) Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket

(a) $y = \sin x + 2x + C$, $y_p = \sin x + 2x + 5$

(b) $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^{3/2}}{3/2} + x + C$, $y_p = \frac{x^3}{3} + \frac{x^{3/2}}{3/2} + x + 0$

(4) Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket

(a) $y = x^2 + Cx^2e^{\frac{1}{x}}$

(b) $y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)e^{-x^2}$

(c) $y = \left(\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C\right)(x^2 + 1)$

(d) $y = -\frac{1}{2} + Ce^{x^2}$

(5) Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket

(a) $y = C\sqrt{x^2 + 1}$, $y_p = 3\sqrt{x^2 + 1}$

(b) $y = Ce^{2\sqrt{x}}$

(c) $y = -1 + Cx$

(d) $y = \ln\left(-\frac{2}{e^{2x} + C}\right)$

(e) $y = C(2x + 1)^{\frac{3}{2}}$, $y_p = 2(2x + 1)^{\frac{3}{2}}$

(f) $y = \operatorname{tg}(x + C) - x$

(g) $y = \sqrt{C(1 + x^2) - 1}$

(h) $y = \sqrt{C(x^2 - 2) - 1}$

(6) Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket

(a) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$

(b) $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$

(c) $y = e^{-2x}(C_1 \sin(\sqrt{5}x) + C_2 \cos(\sqrt{5}x))$

(d) $y = C_1 + C_2e^{-4x}$

(e) $y = C_1 \sin(\sqrt{5}x) + C_2 \cos(\sqrt{5}x)$

(f) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$

(g) $y = e^{3x}(C_1 \sin(5x) + C_2 \cos(5x)) + 5 \cos(2x) - 2 \sin(2x)$

(h) $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-2x} + \frac{x^2}{6} - \frac{5x}{18} + \frac{19}{108}$

(i) $y_h = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$, $y_p = \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$, $y = y_h + y_p = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$

(j) $y = C_1e^{5x} + C_2e^{-2x} + 2 \cos(2x) + 3 \sin(3x)$

(k) $y = C_1e^{4x} + C_2e^{-2x} + x^2 - 2x - 8$

(l) $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + \sin(3x)$

(m) $y = C_1e^{5x} + C_2xe^{5x} + 3e^{3x} - e^{-x}$

(n) $y = e^{-x}(C_1 \sin(3x) + C_2 \cos(3x)) + x + 1$

(o) $y = e^{-x/2} \left(C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{23}x}{2}\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{23}x}{2}\right) \right) + e^{2x} + x^2$

(7) Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket Rez

(a) $y = C_1e^{2x} + C_2 + \frac{e^{2x}}{2}(6x - 3)$

(b) $y = C_1e^{-4x} + C_2 - \frac{e^{-4x}}{4}(12x^2 + 16x + 4)$

(c) $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + 5x^2e^{2x}$

(d) $y = C_1 \sin(3x) + C_2 \cos(3x) + x(3 + 2 \cos(3x))$