

I. feladatsor

(1) Töltse ki az alábbi táblázatot:

Komplex szám	Valós rész	Képzetes rész	Konjugált	Abszolútérték
$4 + 2i$				
$-3 + 4i$				
$5i - 1$				
$-6i$				
	-3	5		
			$3 - 2i$	
			$7i$	

(2) Adottak az alábbi komplex számok: $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = 2i$. Határozza meg az alábbiakat:

- (a) $z_1 + z_2$ (b) $\overline{z_1 + z_2}$ (c) $\overline{z_1} + \overline{z_2}$ (d) $z_1 - z_2$
 (e) $|z_1 + z_2|$ (f) $|z_1| + |z_2|$ (g) $z_1 \cdot z_2$ (h) $\overline{z_1} \cdot z_2$
 (i) $z_3 \cdot z_2$ (j) $\overline{z_1 \cdot z_2}$ (k) $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ (l) $|z_1 \cdot z_2|$
 (m) $|z_1| \cdot |z_2|$ (n) $\frac{z_1}{z_2}$ (o) $\frac{\overline{z_2}}{z_1}$ (p) $\frac{z_1}{z_3}$
 (q) $\frac{1}{z_3}$ (r) $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ (s) $\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ (t) $\frac{z_1 \cdot z_3}{z_2}$
 (u) $\left|\frac{z_1^2 + z_3}{z_2}\right|$

(3) Legyen $z_1 = 3(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$ valamint $z_2 = 12(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$. Határozza meg az alábbiakat:

- (a) $|z_1|$ (b) $|z_2|$ (c) $z_1 \cdot z_2$ (d) $\frac{z_1}{z_2}$
 (e) z_1^3 (f) $\sqrt[3]{z_1}$ (g) $\sqrt[4]{z_2}$ (h) $\sqrt[2]{z_1 \cdot z_2}$

(4) Töltse ki az alábbi táblázatot:

Algebrai alak	Trigonometrikus alak
$1 + i$	
$1 - \sqrt{3}i$	
	$\sqrt{2}(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$
2	
i	

(5) Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán:

- (a) $(2 + 3i)z + 4 = 5 + 2i$
 (b) $z^2 - 2z + 10 = 0$
 (c) $z^2 - 2iz = 3 + 2\sqrt{3}i$
 (d) $z^2 = 9$
 (e) $z^2 = -16$
 (f) $z^3 - i + 1 = 0$
 (g) $(1 + i)z^6 = -2 + 4i$
 (h) $z^6 + 2iz^3 + 3 = 0$
 (i) $z^8 - z^4(1 + 2i) - 1 + i = 0$
 (j) $z^6 - (2 + 4i)z^3 + 4i - 4 = 0$

(6) Végezze el a kijelölt műveleteket:

- (a) $\sqrt{2}(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ) + (4 - 3i)i$
 (b) $\sqrt[3]{4 - 4\sqrt{3}i}$
 (c) $\frac{3 + 3i}{2(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ)}$
 (d) $\frac{i^3 - i^7}{4 - i} \cdot \overline{(2 - i)} + 2(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$
 (e) $\frac{i^{2009} - i^{2010}}{3 - 2i}$

(7) Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán:

(a) $i \cdot \bar{z} - 3 + 2i^3 = 4$

(b) $(2i - 3)z - 5 + i^5 = 2$

(c) $3z + 4\bar{z} = 2 + i$

(d) $z - 2i\bar{z} - i^3 = 3 + 2i$

(e) $z^2 + i\bar{z} = 0$

(f) $\bar{z}^2 - z = 0$

(g)
$$\begin{cases} (2 + i)z_1 + (i + 1)z_2 & = i \\ (2 - i)z_1 - (3 - i)z_2 & = 2 + 5i \end{cases}$$

(h)
$$\begin{cases} z_1 - iz_2 & = -3i \\ (1 + 2i)z_1 + (1 + 3i)z_2 & = 8 + 6i \end{cases}$$

(8) Határozza meg az alábbi komplex számok trigonometrikus alakját:

(a) $z = \sqrt{2}(\cos 45^\circ - i \sin 45^\circ)$

(b) $z = 2(\sin 135^\circ + i \cos 135^\circ)$

(c) $z = 4(\cos 300^\circ + i \sin 150^\circ)$

(d) $z = 4(\cos 330^\circ + i \sin 150^\circ)$

(e) $z = i \cos 30^\circ - \cos 120^\circ$

II. feladatsor

(1) Töltse ki az alábbi táblátot:

$f(x)$	$g(x)$	$f(g(x))$	$g(f(x))$	$f(f(x))$
$\sin(x)$	x^3			
$\sin(x) + x + 1$	\sqrt{x}			
$\frac{1}{x+2}$	$3^x + 1$			
		$\cos(x^4)$		
			$2^{\sin(x)}$	
		$\lg(x^3 + 2x - 1)$		
			$\sqrt{\arcsin(x)}$	
$\ln(x)$	e^x			
$\ln(x)$	x^2			
$\ln(x)$	$\ln(x)$			

(2) Határozza meg a valós számok legbővebb részhalmazát, ahol az alábbi függvények értelmesek:

(a) $f(x) = \frac{\sqrt{(x+1)(x-5)}}{x+4}$

(b) $f(x) = \frac{\arcsin(\frac{x}{2})}{\lg(2x+4)}$

(c) $f(x) = 2^{\frac{x+1}{x-3}}$

(d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}$

(e) $f(x) = \lg\left(\frac{x-2}{x+11}\right)$

(f) $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{x+2}\right)$

(g) $f(x) = \frac{\sqrt{3x-1}}{\ln(2x+36)}$

(h) $f(x) = \frac{\arccos(x+2)}{\ln(x+4)}$

(3) Ábrázolja az alábbi függvényeket:

(a) $f(x) = -2(2x-4)^2 - 5$

(b) $f(x) = 3\arcsin(2x-1) + \pi$

(c) $f(x) = -\ln\left(\frac{x}{2} + 3\right) - 4$

(d) $f(x) = 3e^{1-x} + 2$

(e) $f(x) = -\sqrt{3x+4} - 2$

(4) Határozza meg az alábbi függvények inverz függvényét, ha létezik. Ha nem létezik akkor határozza meg a valós számok legbővebb részhalmazát, ahol az inverz létezik és határozza is meg azt!

(a) $f(x) = 4x - 6$

(b) $f(x) = \sqrt{2x + 6}$

(c) $f(x) = \frac{3}{x+5} - 6$

(d) $f(x) = 2^{x-7} + 3$

(e) $f(x) = \log_5(2x - 10) + 6$

(f) $f(x) = (x - 4)^2 + 3$

(g) $f(x) = \frac{2}{x-4} + 3$

(h) $f(x) = 2 \arcsin\left(\frac{3x-1}{2}\right) + \pi$

(i) $f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{4}\right) - \frac{\pi}{4}$

(j) $f(x) = \cos\left(\frac{x-\pi}{4}\right) - 3$

(5) Páros, páratlan vagy egyik sem az alábbi függvény:

(a) $f(x) = e^{-x}x^2$

(b) $f(x) = e^{-x^2} \sin x$

(c) $f(x) = x^2 + \cos x + 2$

III. feladatsor

- (1) Adja meg az $a_n = \frac{5n-1}{2n+1}$ sorozat következő elemeit: $a_1, a_2, a_{n+1}, a_{n-3}$.
- (2) Vizsgálja meg az alábbi sorozatokat monotonitás és konvergencia szempontjából:
 (a) $a_n = \frac{1}{n+4}$ (b) $a_n = \frac{n+2}{n+3}$ (c) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ (d) $a_n = \frac{4n+2}{3n-7}$
- (3) Adottak az alábbi konvergens sorozatok. Adja meg a határértéket, és azt a küszöbindexet, amelynél nagyobb indexű tagjai a sorozatnak $\varepsilon = \frac{1}{100}$ -nál kisebb hibával közelítik a határértéket!
 (a) $a_n = \frac{4n+1}{n}$ (b) $a_n = \frac{1-3n}{n+4}$ (c) $a_n = \frac{2-3n}{1-4n}$ (d) $a_n = \frac{4n+2}{3n-7}$
- (4) Határozza meg az alábbi nevezetes sorozatok határértéket:
 (a) $a_n = 3$ (b) $a_n = \frac{1}{n}$ (c) $a_n = 2^n$
 (d) $a_n = n^2$ (e) $a_n = 2^{\frac{1}{n}}$ (f) $a_n = \left(-\frac{3}{4}\right)^n$
 (g) $a_n = \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n$ (h) $a_n = n^{\frac{1}{2}}$ (i) $a_n = n^{-\frac{1}{2}}$
 (j) $a_n = \sqrt[n]{n}$ (k) $a_n = \frac{2^n}{n!}$ (l) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3$
- (5) A nevezetes sorozathatárértékek ismeretével és a műveletekre vonatkozó tételek segítségével határozza meg mely sorozatok konvergensnek és mi a határértékük!
 (a) $a_n = 2n^2 - 3n + 1$ (b) $a_n = 7n^3 - 5n^2$
 (c) $a_n = 4n^4 - 12n^3 + 1$ (d) $a_n = -6n^5 + 20n^4 + 100$
- (6) Határozza meg a következő sorozatok határértékét:
 (a) $a_n = \frac{-5n+1}{7n-2}$ (b) $a_n = \frac{3n^2+n+1}{5n^2-7n}$
 (c) $a_n = \frac{1+5n^3-7n^4}{9n^4-4n^2+3n}$ (d) $a_n = \frac{2n+1}{n^2-n+2}$
 (e) $a_n = \frac{-5n^2+2n+1}{1-n-7n^4}$ (f) $a_n = \frac{1-2n^2}{n^3-7n+1}$
 (g) $a_n = \frac{1-n-7n^4}{1-n-7n^4}$ (h) $a_n = \frac{n^3-7n+1}{n^3-7n+1}$
 (i) $a_n = \frac{-5n^2+2n+1}{1+4n}$ (j) $a_n = \frac{1-2n^2}{-2n+7n^2}$
 (k) $a_n = \frac{1+4n}{2n+\sqrt{2n+1}}$ (l) $a_n = \frac{-2n+7n^2}{3n^2+n+\sqrt{n^3+3}}$
 (m) $a_n = \frac{5-n}{4n-2+\sqrt{9n^2+n+3}}$ (n) $a_n = \frac{4-3n^2}{2n^2+\sqrt{n^4+n^3+1}}$
- (7) Határozza meg a következő sorozatok határértékét:
 (a) $a_n = \frac{(2n+1)^2}{\sqrt[3]{5n^6+4n}}$ (b) $a_n = \frac{n^2+1}{2n+1} - \frac{3n^2+1}{6n-1}$
 (c) $a_n = \frac{2n^2+1}{4n-7} - \frac{4n^2+1}{8n+1}$ (d) $a_n = \sqrt{3n+7} - \sqrt{3n+10}$
 (e) $a_n = \sqrt{4n+7} - \sqrt{3n+10}$ (f) $a_n = \sqrt{n^2+7n-1} - \sqrt{n^2+n}$
 (g) $a_n = \frac{\sqrt{4n^2+2n+1}}{\sqrt{5n^2+n+10}}$ (h) $a_n = \frac{n^2+\sqrt{n^3+1}}{3n^2-n+4}$
- (8) Határozza meg a következő sorozatok határértékét:
 (a) $a_n = \frac{2^{n+1}-3^{n-1}}{1+3^n}$ (b) $a_n = \frac{2^{3n+1}-3^{n+1}}{2n+8^{n+1}}$
 (c) $a_n = \frac{5^{2n-1}-2^n}{3+3^{2n}}$ (d) $a_n = \frac{4^{2n+1}-2^{n+3}}{5+17^{n+2}}$
 (e) $a_n = \frac{3^{2n+1}-4^{3n-1}}{1+2^n}$ (f) $a_n = \frac{4^{3n+1}-2^{3n+1}}{5^{3n-3}+8^{n+1}}$
 (g) $a_n = \frac{2^{4n-1}-5^{n-3}}{4^{2n+2}+5^{2n}}$ (h) $a_n = \frac{4^{2n-4}-3^{2n+3}}{5+2^{n+2}}$

(9) Határozza meg a következő sorozatok határértékét:

$$(a) a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n+3}$$

$$(c) a_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^n$$

$$(e) a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}$$

$$(g) a_n = \left(\frac{n+5}{n+2}\right)^{n+1}$$

$$(i) a_n = \left(\frac{n+14}{n-3}\right)^{2n-1}$$

$$(k) a_n = \left(\frac{n+5}{2n+2}\right)^{n+1}$$

$$(m) a_n = \left(\frac{2n+2}{n+5}\right)^{n+2}$$

$$(o) a_n = \left(\frac{n^2+3}{n^2+5}\right)^{n-2}$$

$$(q) a_n = \left(\frac{2n^2-n+3}{2n^2+5}\right)^{n^2-202}$$

$$(s) a_n = \left(\frac{n^2+2}{n^2-4}\right)^{n^3+2}$$

$$(b) a_n = \left(1 + \frac{4}{2n}\right)^n$$

$$(d) a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$$

$$(f) a_n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{2n-3}$$

$$(h) a_n = \left(\frac{2n+6}{2n+8}\right)^{n-3}$$

$$(j) a_n = \left(\frac{7n+4}{7n+5}\right)^{3n-2}$$

$$(l) a_n = \left(\frac{2n+6}{4n+8}\right)^{n-3}$$

$$(n) a_n = \left(\frac{4n+8}{2n+6}\right)^{n-7}$$

$$(p) a_n = \left(\frac{2n^2+2}{2n^2+5}\right)^{n^2+2}$$

$$(r) a_n = \left(\frac{3n^2+2n-3}{3n^2+7}\right)^{7n-5}$$

$$(t) a_n = \left(\frac{2n+2}{n^2+5}\right)^{n+2}$$

IV. feladatsor

(1) Határozza meg az alábbi függvényhatárértékeket a függvény grafikonjának ismeretében:

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3, \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}, \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}$

(e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x, \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x$

(f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x, \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0} \lg x, \lim_{x \rightarrow 0^+} \lg x, \lim_{x \rightarrow +\infty} \lg x$

(h) $\lim_{x \rightarrow 0} \log_{\frac{1}{2}} x, \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_{\frac{1}{2}} x, \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{\frac{1}{2}} x$

(i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x, \lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x$

(j) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x$

(k) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \arcsin x, \lim_{x \rightarrow 1} \arcsin x, \lim_{x \rightarrow 1^-} \arcsin x$

(l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x, \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x$

(m) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \arccos x, \lim_{x \rightarrow 1} \arccos x$

(n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arcctg} x, \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arcctg} x$

(o)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & \text{ha } x \geq 1 \\ 4^x & \text{ha } x < 1 \end{cases}$$

(p) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1} f(x), \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{ha } x < 2 \\ \sqrt{x} & \text{ha } x \geq 2 \end{cases}$$

(q) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow 2} f(x), \lim_{x \rightarrow 9} f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^x \frac{1}{3} & \text{ha } x \geq -1 \\ -\frac{1}{x} & \text{ha } x < -1 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -1} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow 10} f(x)$

(2) Határozza meg az alábbi függvények x_0 -beli határértékét:

(a) $f(x) = -x^5 + 3x^4 + x^3 + 1, x_0 = -\infty, +\infty$

(b) $f(x) = x^3 - 10x^2 + x + 20, x_0 = -\infty, +\infty$

(c) $f(x) = \frac{-3x^2 - 5x + 1}{4x^2 + 7x + 3}, x_0 = -\infty, +\infty$

(d) $f(x) = \frac{7x^3 + 5x^2 + 1}{-2x^3 - x^2 + 10}, x_0 = -\infty, +\infty$

(e) $f(x) = \frac{-x^3 + x + 2}{x^4 + x^2 + 10}, x_0 = -\infty, +\infty$

(f) $f(x) = \frac{-2x^3 + 4x^2 - 2}{-x^2 + 3x + 7}, x_0 = -\infty, +\infty$

(g) $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 + 2x - 3}, x_0 = -\infty, +\infty, -3, 0, 1$

$$(h) f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{-x^3 + 6x^2 - 8x}, x_0 = -\infty, +\infty, 0, 1, 2, 4$$

$$(i) f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 6x + 9}, x_0 = 0, 1, 2, 3$$

$$(j) f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - x - 2}, x_0 = -1, 2$$

$$(k) f(x) = \frac{x^3 + 6x^2 + 9x}{x^2 + 5x + 6}, x_0 = -3, 0$$

$$(l) f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 8x}{x^2 - 2x - 8}, x_0 = -\infty, +\infty$$

$$(m) f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}, x_0 = 0, +\infty$$

$$(n) f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}, x_0 = -\infty, +\infty$$

(3) Határozza meg az alábbi határértékeket:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{5-x} - \sqrt{5+x}} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sqrt{3-2x} - \sqrt{3+2x}}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{3x} \quad (d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{7x}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{e^{5x} - 1} \quad (f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{4x}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{7x} \quad (h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\sin(3x)}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} \quad (j) \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \left(\frac{e^{2x} - 1}{2x} \right)$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2x+3} \right)^{5x-1} \quad (l) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+6} \right)^{2x+1}$$

$$(m) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x+2} \right)^{x+4} \quad (n) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-2}{5x+7} \right)^{3x-2}$$

$$(o) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{2x+3} \right)^{x+1} \quad (p) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{7x-3} \right)^{3x}$$

$$(q) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{2x-1} \right)^{2x+3} \quad (r) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+2}{x+3} \right)^{4x-1}$$

$$(s) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2+2}{2x^2-1} \right)^{2x+3} \quad (t) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-3}{2x-1} \right)^{x^2+3}$$

$$(u) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2+2}{3x^2-1} \right)^{2x^2+3} \quad (v) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2+2x+20}{3x^2+20} \right)^{2x+3}$$

V. feladatsor

(1) Adja meg az x_0 helyhez tartozó differenciahányados függvényt, a differenciáhányados értékét a definíció alapján:

(a) $f(x) = 5, x_0 = 2, x_0 = -3$

(b) $f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = 2, x_0 = -3$

(c) $f(x) = \sqrt{x} + x, x_0 = -3, x_0 = 2, x_0 = 4$

(2) Adja meg az alábbi függvények szelő egyenesének egyenletét, valamint az érintő egyenesének egyenletét:

(a) $f(x) = 4x^2 + 1, P_1(0, 1), P_2(-1, 5)$

(b) $f(x) = \frac{1}{x}, P_1(2, \frac{1}{2}), P_2(-3, -\frac{1}{3})$

(3) Határozza meg az alábbi függvények deriváltfüggvényeit:

(a) $f(x) = \sqrt[3]{x^5} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} - 1$

(b) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x - 4 \sin x$

(c) $f(x) = 2x^3 + \sqrt{\pi} + \log_3 x$

(d) $f(x) = 3x^4 - \cos x + \frac{5}{x}$

(e) $f(x) = \sin x \cdot \operatorname{tg} x$

(f) $f(x) = e^x \cdot \ln x$

(g) $f(x) = \lg x \cdot \arcsin x$

(h) $f(x) = \sqrt{x} \lg x$

(i) $f(x) = 4x^5 \cdot \operatorname{arctg} x$

(j) $f(x) = \ln x \sin x$

(k) $f(x) = \operatorname{tg} x$

(l) $f(x) = \operatorname{ctg} x$

(m) $f(x) = \frac{e^x}{\sin x}$

(n) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\ln x}$

(o) $f(x) = \frac{2^x - x^4}{x + 2}$

(p) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} + 15}{3 \sin x}$

(q) $f(x) = \frac{\operatorname{cgt} x}{e^x + 4}$

(r) $f(x) = \sin(x^3)$

(s) $f(x) = (\sin x)^3$

(t) $f(x) = \ln(x^2 + 4)$

(u) $f(x) = e^{x^2 - \frac{1}{x} + 3}$

(v) $f(x) = e^{\operatorname{tg} x \cdot \ln(x^2 + \cos x)}$

(w) $f(x) = x^x$

(x) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$

(y) $f(x) = \sin\left(\frac{\sqrt{x+3}}{2^x + x^2}\right)$

(z) $f(x) = (x^3 + 3)^{\operatorname{arctg} x}$

(aa) $r(\varphi) = 4^\varphi \cdot \ln \varphi + 2$

(ab) $V(t) = t^6 \cdot \cos(3t)$

(ac) $h(t) = t \cdot p^5 - p^7 + t, p$ valós paraméter

(ad) $h(p) = t \cdot p^5 - p^7 + t, t$ valós paraméter

(aa) $f(x) = \operatorname{ctg} x \cdot (\sqrt{x} + 3^x)^{x+4}$

(4) Határozza meg az alábbi határértékeket:

$$\begin{array}{cccc}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(5x)}{3x} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{3x^2 + x + 11} & \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \cdot \ln(x)) & \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x \\
\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x & \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} & \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) \\
\lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{x-1}{x-x^2}} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln \frac{x}{2}}{x-2} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} \\
\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{x^2} & \lim_{x \rightarrow 0} 2x \cdot \operatorname{ctg} 3x & \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x & \lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{ctg} x)^{\sqrt[3]{x}} \\
\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x}{\ln x} & \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} & \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln(x^2 + 1)) & \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \operatorname{tg} x
\end{array}$$

(5) Írja fel az alábbi $f(x)$ függvények m meredekségű érintőinek egyenletét:

(a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 18x + 20$, $m = 6$

(b) $f(x) = -\frac{1}{x+2} + x$, $m = 10$

(c) $f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2x + 3)$, $m = \frac{1}{26}$

(6) Hol növekvő, hol csökkenő, hol van lokális szélsőértéke és milyen a szélsőérték jellege az $f(x)$ függvénynek, ha a derivált függvénye az alábbi:

(a) $f'(x) = (x+4)(x-3)^2$

(b) $f'(x) = \frac{(x+5)^2(x-1)}{x-3}$

(c) $f'(x) = \ln x \cdot \frac{(x-2)^2(x-5)}{(x+3)(x-4)}$

(7) Hol konvex, hol konkáv, hol van inflexiós pontja az $f(x)$ függvénynek, ha a második derivált függvénye az alábbi:

(a) $f''(x) = (x+4)(x-3)^2$

(b) $f''(x) = \frac{(x+4)^3(x-2)^2}{x+1}$

(c) $f''(x) = \frac{\sqrt{x}(x-4)}{(x-1)^2(x-2)} \cdot 2^x$

(8) Végezzen teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényeken:

(a) $f(x) = 3x - x^3$

(b) $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$

(c) $h(x) = 4x^2 + \frac{1}{x}$

(d) $i(x) = \frac{x^2}{x^2+4}$

(e) $j(x) = x^2 e^{-x}$

(f) $k(x) = x \lg x$

(g) $l(x) = \ln(x^2 + 4)$

(h) $m(x) = \ln(x^2 - 1)$

(9) Határozza meg az alábbi függvények x_0 körüli n -ed fokú Taylor polimontját!

(a) $f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 3$, $x_0 = 0$, $x_0 = 1$, $n = 4$

(b) $f(x) = e^{1-2x}$, $x_0 = 0$, $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_0 = 1$, $n = 3$, $n = 4$

(c) $f(x) = \ln(x+2)$, $x_0 = 0$, $x_0 = -1$, $n = 3$

(10) Oldja meg a következő szöveges feladatokat!

(a) Egy felül nyitott, négyzet alapú doboz készítéséhez $2m^2$ területű lemezt használhatunk fel. Hogyan válasszuk meg a doboz méreteit, hogy a térfogata a legnagyobb legyen, és mekkora ez a legnagyobb térfogat?

(b) Egy folyó két partján van két város, a képen látható elrendezés szerint. Szeretnénk kábelt fektetni a két város között. A kábelfektetés költsége 1000 peták méterenként a százföldön, 2000 peták méterenként a víz alatt. Milyen útvonal(ak) esetén minimális a költség?

- (c) Egy felül nyitott henger alakú, $1/2$ l térfogatú mérőedényt szeretnénk készíteni. Hogyan válasszuk az edény alapsugarát és magasságát, hogy minél kevesebb lemezt használjunk fel, és mennyi felhasznált lemezmennyiség?
- (d) Legfeljebb mekkora téglalap alakú területet lehet körbekeríteni 400 méter kerítéssel?
- (e) Legalább mennyi kerítés kell egy $25 m^2$ alapterületű téglalap alakú telek körbekerítéséhez?

VI. feladatsor

(1) Az alapfüggvények integrálja segítségével határozza meg az alábbi függvények határozatlan integrálját:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} f(x) = x^4 \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} + 2 & \text{(b)} f(x) = \frac{3x^4 - 2}{x^5} \\
 \text{(c)} f(x) = e^x - 4 \sin x + \frac{1}{\cos^2 x} & \text{(d)} f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - 4x^2}} \\
 \text{(e)} f(x) = \frac{2}{3 + 3x^2} + 4 & \text{(f)} f(x) = 5^x - 3x^5 + \frac{2}{x} + 3 \\
 \text{(g)} f(x) = 4 \cos x - \frac{3}{\sin^2 x} & \text{(h)} f(x) = \frac{7}{x} + \frac{4}{x^2} - 3\sqrt{3}
 \end{array}$$

(2) Határozza meg az alábbi függvények határozatlan integrálját:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} f(x) = (1 - 7x)^2 & \text{(b)} f(x) = \frac{3}{2x + 3} \\
 \text{(c)} f(x) = e^{2-4x} & \text{(d)} f(x) = \sin(5 - 3x) \\
 \text{(e)} f(x) = \frac{1}{\sin^2(4x + 1)} & \text{(f)} f(x) = \frac{2}{1 + (4x + 3)^2} \\
 \text{(g)} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (5x + 2)^2}} & \text{(h)} f(x) = \frac{-1}{\sqrt[3]{5x + 3}}
 \end{array}$$

(3) Határozza meg az alábbi függvények határozatlan integrálját:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} f(x) = 4 \sin x \cdot \cos^5 x & \text{(b)} f(x) = \frac{2x^2}{\sqrt[3]{3 + 2x^3}} \\
 \text{(c)} f(x) = \frac{2x}{\sqrt[4]{x^2 + 2}} & \text{(d)} f(x) = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{2 \cos^2 x} \\
 \text{(e)} f(x) = \sqrt[5]{x^3 - 2} \cdot x^2 & \text{(f)} f(x) = \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^2 x}}{1 + x^2} \\
 \text{(g)} f(x) = \frac{3 \ln^4 x}{x} & \text{(h)} f(x) = \frac{4}{(\arccos^2(x)) \cdot \sqrt{1 - x^2}} \\
 \text{(i)} f(x) = \frac{\cos x}{\sin^3 x} & \text{(j)} f(x) = \frac{2x + 1}{(x^2 + x)^4}
 \end{array}$$

(4) Határozza meg az alábbi függvények határozatlan integrálját:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} f(x) = \frac{2}{4x + 1} & \text{(b)} f(x) = \frac{7}{4 - 3x} \\
 \text{(c)} f(x) = \frac{-5x}{1 + x^2} & \text{(d)} f(x) = \frac{4 \cos x}{1 + 3 \sin x} \\
 \text{(e)} f(x) = \frac{4e^{-x}}{5 + 3e^{-x}} & \text{(f)} f(x) = \frac{2}{(1 + x^2) \operatorname{arctg}(x)}
 \end{array}$$

(5) Határozza meg az alábbi függvények határozatlan integrálját:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} f(x) = e^{1 + \sin x} \cos x & \text{(b)} f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{4x^2} \\
 \text{(c)} f(x) = \frac{\cos(5\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} & \text{(d)} f(x) = \frac{4}{x^3} \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)
 \end{array}$$

(6) Határozza meg az alábbi függvények határozatlan integrálját parciális integrálással:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} f(x) = (2x - 5) \cos x & \text{(b)} f(x) = (x^2 - 1) \sin x \\
 \text{(c)} f(x) = (4x + 3)e^{2x} & \text{(d)} f(x) = 4xe^{1-2x} \\
 \text{(e)} f(x) = \sin(2x)e^{1-x} & \text{(f)} f(x) = \arcsin x \\
 \text{(g)} f(x) = (x^2 - 2x + 1) \ln x & \text{(h)} f(x) = \ln x \\
 \text{(i)} f(x) = \operatorname{arctg} x & \text{(j)} f(x) = 2x \operatorname{arctg} x \\
 \text{(k)} f(x) = \cos(2x + 2)e^{3x-4} & \text{(l)} f(x) = \ln^2(x) \cdot (x^2 + x + 2)
 \end{array}$$

(7) Határozza meg az alábbi függvények határozatlan integrálját:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} f(x) = \frac{1}{x^2 + 4} & \text{(b)} f(x) = \frac{1}{9x^2 + 1} \\ \text{(c)} f(x) = \frac{1}{16x^2 + 25} & \text{(d)} f(x) = \frac{1}{5x^2 + 3} \\ \text{(e)} f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 5} & \text{(f)} f(x) = \frac{1}{x^2 - 6x + 13} \\ \text{(g)} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}} & \text{(h)} f(x) = \frac{1}{\sqrt{6x - 9x^2}} \\ \text{(i)} f(x) = \frac{1}{\sqrt{-4x^2 - 12x - 8}} & \text{(j)} f(x) = \frac{1}{\sqrt{12x - 9x^2 - 3}} \end{array}$$

VII. feladatsor

(1) Határozza meg az alábbi határozott integrálok értékét:

$$(a) \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx \quad (b) \int_2^7 \sqrt{x+2} dx \quad (c) \int_{2\sqrt{2}}^3 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$
$$(d) \int_1^e \ln x dx \quad (e) \int_{-4}^{-2} \frac{1}{x^2+8x+20} dx \quad (f) \int_0^\pi \sin x dx$$

(2) Határozza meg a területeket, ha:

(a) $f(x) = \frac{1}{x+2}$, és $x \in [-6; -3]$

(b) $f(x) = xe^{2x}$, és $x \in [0; 1]$

(c) $f(x) = \sqrt{x+3}$, és $x \in [-3; 1]$

(3) Határozza meg a két görbe által közrezárt területet!

(a) $f(x) = x^2$, $g(x) = x+2$

(b) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{x}{3}$

(c) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$

(4) Határozza meg az $f(x)$ és az x tengely által közbezárt területet!

(a) $f(x) = x^2 - 5x$

(b) $f(x) = -x^2 - 5x$

(c) $f(x) = (x-2) \ln x$

(5) Határozza meg alábbi függvények ívhosszát!

(a) $f(x) = 3x$ $x \in [2; 4]$

(b) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ $x \in [0; 1]$

(c) $f(x) = 2x\sqrt{x+1}$, $x \in [0; 11]$

(6) Határozza meg alábbi függvények x tengely körüli megforgatásával keletkezett forgástest térfogatát!

(a) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ $x \in [0; 1]$

(b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$ $x \in [-2; 0]$

(c) $f(x) = \frac{2}{4-x}$, $x \in [0; 2]$

(d) $f(x) = e^x + 1$, $x \in [0; 1]$

(e) $f(x) = x\sqrt{\ln x}$, $x \in [1; e]$

(f) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{4x^2+4x+10}}$, $x \in [-\frac{1}{2}; 1]$

(7) Határozza meg alábbi függvények x tengely körüli megforgatásával keletkezett forgástest palástjának felszínét!

(a) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ $x \in [0; 1]$

(b) $f(x) = x^3$ $x \in [0; 2]$

(8) Határozza meg alábbi függvények x tengely körüli megforgatásával keletkezett forgástest teljes felszínét!

(a) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ $x \in [0; 1]$

(b) $f(x) = x^3$ $x \in [0; 2]$

VIII. feladatsor

- (1) Igazolja, hogy az $y' = 2 - 2x + y$ differenciálegyenletnek megoldása az $y = 2x + 3e^x$!
- (2) Igazolja, hogy az $y'' - 3y' + 2y + 3 - 2x = 0$ differenciálegyenletnek az $y = 3e^x + e^{2x} + x$ függvény megoldása
- (3) Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket
- (a) $y' = \cos x + 2, \quad y(0) = 5$
 - (b) $\frac{y'}{x^2 + \sqrt{x} + 1} = 1, \quad y(0) = 0$
- (4) Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket
- (a) $y' + \frac{1 - 2x}{x^2}y = 1$
 - (b) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$
 - (c) $y' - \frac{2x}{x^2 + 1}y = x$
 - (d) $y'x - 2yx^2 = x^2$
- (5) Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket
- (a) $(x^2 + 1)y' = xy, \quad y(0) = 3$
 - (b) $y' = \frac{y}{\sqrt{x}}$
 - (c) $xy' - y = 1$
 - (d) $y' = e^{2x+y}$
 - (e) $(2x + 1)y' = 3y, \quad y(4) = 54$
 - (f) $y' = (y + x)^2$
 - (g) $x(1 + y^2) = y(1 + x^2)y'$
 - (h) $(y^2 + 1)x = (x^2 - 2)yy'$
- (6) Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket
- (a) $y'' + 4y' + 3y = 0$
 - (b) $y'' - 6y' + 9y = 0$
 - (c) $y'' + 4y' + 5y = 0$
 - (d) $y'' + 4y' = 0$
 - (e) $y'' + 5y = 0$
 - (f) $y'' - 4y = 0$
 - (g) $y'' - 6y' + 34y = 174 \cos(2x)$
 - (h) $y'' + 5y' + 6y = x^2$
 - (i) $y'' + 4y' + 3y = 2x + 3$
 - (j) $y'' - 3y' - 10y = -30 \sin(2x) - 46 \cos(2x)$
 - (k) $y'' - 2y' - 8y = -8x^2 + 12x + 70$
 - (l) $y'' + 2y' + y = 6 \cos(3x) - 8 \sin(3x)$
 - (m) $y'' - 10y' + 25y = 12e^{3x} - 36e^{-x}$
 - (n) $y'' + 2y' + 10y = 10x + 12$
 - (o) $y'' + y' + 6y = 12e^{2x} + 6x^2 + 2x + 2$
- (7) Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket
- (a) $y'' - 2y' = 6e^{2x}$
 - (b) $y'' + 4y' = (24x + 10)e^{-4x}$
 - (c) $y'' - 4y' + 4y = 10e^{2x}$
 - (d) $y'' + 9y = 27x - 12 \sin 3x$